

一、选择题 (共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

1. 设 $\alpha(x) = \cos x - 1$, $\beta(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$, $\gamma(x) = e^x - 1$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时 ()

- A. $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的同阶无穷小, $\beta(x)$ 是 $\gamma(x)$ 的高阶无穷小
 B. $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小, $\beta(x)$ 是 $\gamma(x)$ 的同阶无穷小
 C. $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的同阶无穷小, $\beta(x)$ 是 $\gamma(x)$ 的同阶无穷小
 D. $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小, $\beta(x)$ 是 $\gamma(x)$ 的高阶无穷小

2. 若函数 $f(x) = \frac{\sin 2x}{x} + 2 \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = ()$

- A. -4 B. -2 C. 2 D. 4

3. 若 e^{-2x} 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $f''(x) = ()$

- A. $4e^{-2x}$ B. $-4e^{-2x}$ C. $8e^{-2x}$ D. $-8e^{-2x}$

4. 若 $f(x) = \ln(2x+1)$, 则 $f^{(n)}(x) = ()$

- A. $\frac{(-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot (n-1)!}{(2x+1)^n}$ B. $\frac{(-1)^{n-1} \cdot 2^{n-1} \cdot (n-1)!}{(2x+1)^n}$
 C. $\frac{(-1)^{n-1} \cdot 2^n \cdot (n-1)!}{(2x+1)^n}$ D. $\frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot (n-1)!}{(2x+1)^n}$

5. 下列级数收敛的是 ()

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2}{n+2}$ C. $\sum_{n=1}^n n \sin \frac{1}{n}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$

6. 设 $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 + y^2 - 2y$, 则 $f(x, y)$ ()

- A. 在点 $(0, 1)$ 处不取极值, 在 $(1, 1)$ 处取极大值
 B. 在点 $(0, 1)$ 处不取极值, 在 $(1, 1)$ 处取极小值
 C. 在点 $(0, 1)$ 处取极大值, 在 $(1, 1)$ 处取极小值
 D. 在点 $(0, 1)$ 处取极小值, 在 $(1, 1)$ 处取极大值

7. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & -8 & 27 \end{pmatrix}$ 的秩为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

8. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则一定线性相关的向量组为 ()

A. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ B. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

C. $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ D. $\alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$

二、填空题 (共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 若 $x = 1$ 是 $f(x) = \frac{x^3 - ax}{x^2 - x}$ 的第一类间断点, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

10. $y = y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = t^3 - 3t \end{cases}$ 所确定的函数, 若 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=t_0} = -\frac{3}{2}$, 则 $t_0 = \underline{\hspace{2cm}}$

11. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, $y = f(\sin x)$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$

12. 若 $\int_{-\infty}^a e^x dx = \int_a^{+\infty} e^{1-x} dx$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$

13. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!} (x-1)^n$ 的收敛半径为 $\underline{\hspace{2cm}}$

14. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

三、计算题 (共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\arctan x^2 - \frac{\pi}{2} \right)$

16. 求不定积分 $\int \frac{\sqrt{x+2} - 1}{(x+3)\sqrt{x+2}} dx$

17. 计算定积分 $\int_0^1 \frac{x}{x+1} \sqrt{1-x^2} dx$

18. 已知 $y = e^{3x}$ 、 $y = e^x + e^{3x}$ 、 $y = e^{2x} + e^{3x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的三个特解, 求该微分方程。

19. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $\arctan(x + 2y + 3z) - xyz = 0$ 确定, 求全微分 $dz|_{(0,0)}$ 。

20. 计算二次积分 $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{\cos y - 1}{y} dy$

21. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X 使得 $AXB = C$ 。

22. 求方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

的通解。

四、证明题 (10 分)

23. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ 。证明:

- (1) 存在 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $f(\eta) = \eta$;
- (2) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 2\xi$ 。

五、综合题 (共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分)

24. 设 $f(x)$ 满足 $f'(x) - f(x) = e^x(2x - 4)$, 且 $f(0) = 5$, 求:

- (1) $f(x)$ 的解析式;
- (2) 曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间与拐点。

25. 设连续函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(1) = 0$, 由曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = t (t > 1)$ 及 x 轴围成曲边三角形 D_t , 已知 D_t 面积为 $t \ln t - t + 1$ 。求当 $t = e$ 时, D_t 绕 x 轴旋转一周的旋转体体积。