



(23) 一、选择题

1. 答案: A

思路: $x = 1$ 为第一类间断点 \Rightarrow 分母 $x - a$ 在 $x = 1$ 为 $0 \Rightarrow a = 1$; 分子在 $x = 1$ 为 $0 \Rightarrow 1 + a + b = 0 \Rightarrow b = -2$, 故 $ab = -2$ 。

2. 答案: C

思路: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, $f(x) - 1 \sim \frac{1}{2}x$, 故 $a = \frac{1}{2}, k = 1$ 。

3. 答案: B

思路: $f(x) = \ln(1+x)$, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$, $f^{(2023)}(0) = 2022!$ 。

4. 答案: D

思路: $f(x) = (\sin 2x)' = 2 \cos 2x$, $f'(x) = -4 \sin 2x$, $f'(1) = -4 \sin 2$ 。

5. 答案: C

思路: $f(u, v) = uv$, $f'_u = v, f'_v = u$, $(2, 0) \Rightarrow f'_u = 0, f'_v = 2$ 。

6. 答案: B

思路: 交错级数收敛 $\Rightarrow p > 0$; 等比级数发散 $\Rightarrow p \leq 1$, 故 $0 < p \leq 1$ 。

7. 答案: A

思路: $|A| = (a+2)(a-1)^2 = 0$, 秩为 2 $\Rightarrow a = -2$ 。

8. 答案: D

思路: 系数行列式 $k^3 + 1 = 0 \Rightarrow k = -1$ 。

二、填空题

9. 1 思路: 设极限值为 A, 两边取极限

10. -2 思路: 由斜率算出对应 t 值, 然后求点坐标代入算 m

11. $\frac{1}{2}$ 思路: 奇函数过 (0, 0) 点结合极限定义

12. $\sqrt{2}$ 思路: 求导再倒过来

13. 2 思路: 比值法求收敛区间再看端点收敛性

14. 5 思路: 矩阵运算

三、计算题

15. 极限：等价无穷小替换加洛必达，结果 $-\frac{1}{6}$ 。
16. 积分：求导得 $f(x)$ ，积分结果 $2x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$ 。
17. 定积分：三角代换，结果 $\frac{\pi}{2} - 1$ 。
18. 偏导：隐函数求导，结果 **2**。
19. 微分方程： $y = xe^x + e^x$ 。
20. 二重积分：结果 $\frac{\pi}{2} - 1$ 。
21. 矩阵： $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。
22. 方程组： $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 1$ ，对应通解略。

四、证明题

23. 令 $F(x) = \sin x + \cos x - 1 - x + x^2$ ，求导证 $F(x) > 0$ 即可。

五、综合题

24. (1) $a = 0, b = -2$;
(2) 凸区间 $(-\infty, -\frac{1}{2})$, 凹区间 $(-\frac{1}{2}, 1), (1, +\infty)$, 拐点 $(-\frac{1}{2}, -\frac{8}{9})$ 。
25. 极限结果 $\frac{\pi}{2}$ 。

(24) 一、选择题

1. 答案：A

思路： $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$, $\sqrt{1+x^2} - 1 \sim \frac{1}{2}x^2$, $e^x - 1 \sim x$, 故 α 是 β 同阶, β 是 γ 高阶。

2. 答案：A

思路：设 $A = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, 则 $A = 2 + 2A \Rightarrow A = -2$, 再算趋于无穷。

3. 答案：D

思路： $f(x) = -2e^{-2x}$, $f'(x) = 4e^{-2x}$, $f''(x) = -8e^{-2x}$ 。

4. 答案: C

思路: $\ln^{(n)}(ax+b) = \frac{(-1)^{n-1}a^n(n-1)!}{(ax+b)^n}$, 这里 $a=2$ 。

5. 答案: D

思路: A 发散; B 通项不趋于 0; C 通项趋于 1; D 莱布尼茨判别收敛。

6. 答案: B

思路: 求驻点 $(0,1), (1,1)$, 判别式 $AC - B^2$ 得 $(0,1)$ 无极值, $(1,1)$ 极小。

7. 答案: D

思路: 范德蒙德矩阵, 秩为 4。

8. 答案: B

思路: $(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_1) = 0$, 必线性相关。

二、填空题

9. 1 思路: 约分结合极限定义

10. 0 思路: 分别求导再相除

11. 1 思路: 导数的极限定义

12. $\frac{1}{2}$ 思路: 广义积分或者考虑对称性

13. $\frac{3}{e}$ 思路: 比值法

14. 4 思路: 行变换 + 展开

三、计算题

15. -1 , 思路: 等价无穷小 $\arctan u - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{u}$, 或者代换化成 $0/0$ 型。

16. $-2 \arctan \sqrt{x+2} + \ln(x+3) + C$, 根式代换。

17. $1 - \frac{\pi}{4}$, 三角代换。

18. $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$, 先找到特征根。

19. $dz = -\frac{1}{3}dx - \frac{2}{3}dy$, 全微分求偏导。

20. $\sin 1 + \cos 1 - \frac{3}{2}$, 思路: 交换积分次序。

21. $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 。

22. 通解: $(2, 3, 0, 0)^T + k_1(-1, 3, 1, 0)^T + k_2(-1, 1, 0, 1)^T$ 。

四、证明题

23. (1) 令 $F(x) = f(x) - x$, 用零点定理;

(2) 令 $G(x) = x(f(x) - x)$, 用罗尔定理。

五、综合题

24. (1) $f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$;

(2) 凹区间 $(1, +\infty), (-\infty, -1)$, 凸区间 $(-1, 1)$, 拐点 $(-1, \frac{10}{e}), (1, 2e)$ 。

25. $\pi e - 2\pi$ 。

(25) 一、选择题

1. 答案: A

思路: 1^∞ 型极限, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right)^x = e^{a-b}$ 。

2. 答案: B

思路: $f(x) \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^4 = \frac{1}{8} x^4$, $g(x) \sim x^{n^2}$, 故 $n^2 = 4 \Rightarrow n = 2$ 。

3. 答案: A

思路: 导数定义变形, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0 f(x) - x f(x_0)}{x - x_0} = x_0 f'(x_0) - f(x_0)$ 。

4. 答案: D

思路: $x \rightarrow \infty$ 时函数 $= 1$, 水平渐近线 $y = 1$ 。

5. 答案: C

思路: 求导两次, $f''(0) = 2$ 。

6. 答案: C

思路: 条件收敛 $\iff 0 < k \leq 2$ 。

7. 答案: B

思路: $AB = A - B \Rightarrow (A + E)(B - E) = E$, 故 $A + E, B - E$ 均可逆。

8. 答案: D

思路: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 相关 $\Rightarrow k = 3$, 验证 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 无关。

二、填空题

9. $-\frac{\pi}{2}$ 思路：等价无穷小
10. $\ln 3dx$ 思路：取对数后链式法则
11. 2 思路：链式法则
12. $(-1, -2e^{-1})$ 思路：求一阶导和二阶导
13. $-\frac{3}{4}$ 思路：比值法和不等式变化一下
14. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 思路：矩阵求逆运算

三、计算题

15. $-\frac{1}{e}$ ，思路：等价无穷小替换 + 洛必达。
16. $-\sqrt{4-x^2} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C$ ，思路：三角代换。
17. $\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{6}$ ，思路：根式代换 + 凑微分。
18. $y = \frac{x \sin x + \cos x}{x+1}$ ，思路：一阶线性常微分。
19. $\frac{6}{e^2}$ ，思路：二阶混合偏导。
20. $\frac{1}{6}$ ，思路：对称性消去奇函数项。
21. $|B| = -4$ ，思路：矩阵运算 + 行变换。
22. $k = -1$ ，通解： $(2, 1, 0, 0)^T + k(-5, -2, 0, 1)^T$ 。

四、证明题

23. (1) 对 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 用拉格朗日中值定理；
(2) 令 $F(x) = xf'(x) + f(x)$ ，用罗尔定理。

五、综合题

24. (1) 面积 $\frac{2}{3}$ ；(2) 绕 x 轴体积 $\frac{2\pi}{5}$ ；(3) 绕 y 轴体积 $\frac{4}{3}\pi$ 。
25. $\frac{1}{2}$ 。

(26) 一、选择题

1. 答案: A

思路: $f(x) \sim x^4$, $g(x) \sim x^3$, 故 f 是 g 的高阶无穷小。

2. 答案: B

思路: 左右极限不相等, $x = 0$ 为跳跃间断点。

3. 答案: D

思路: $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}2^n n!}{(2x-3)^{n+1}}$, 代入 $x = 1$ 得结果。

4. 答案: B

思路: 等价无穷小 $e^u - 1 \sim u$, 得水平渐近线 $y = -\frac{1}{2}$ 。

5. 答案: B

思路: 反常积分计算得 $a = \frac{1}{2}$ 。

6. 答案: C

思路: $p = \frac{3}{2} > 1$, 绝对收敛。

7. 答案: B

思路: 计算行列式, 只有 $A - 2B$ 可逆。

8. 答案: B

思路: 系数行列式不为 0, 得 $2k_1 - k_2 = 6$ 。

二、填空题

9. $\frac{2}{3}$ 思路: 平方差 + 导数定义

10. (1, 0) 思路: 二阶导

11. e^{-4} 思路: 第二种重要极限, 配凑或取对数

12. $axe^{\sqrt{ax}}$ 思路: 二阶齐次求特征根

13. 3 思路: 比值法

14. -1 思路: 行变换

三、计算题

15. -3, 思路: 洛必达 + 等价无穷小。

16. $\frac{(x+1)^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + C$, 思路: 分部积分 + 分式化简。

17. $\frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32}$, 思路: 奇偶对称性化简 + 三角代换。

18. $y = e^{-x^2-x} (\int e^x dx + C) = Ce^{-x^2-x} + e^{-x^2}$, 思路: 一阶线性常微分公式。

19. $dz = -\frac{1}{x^2} f dx + \frac{1}{x}(f'_1 + f'_2 2xy) dx - (\frac{2}{x} f'_1 - x f'_2) dy$, 思路: 链式法则 + 全微分。

20. $\frac{2}{e} - \frac{1}{6}$, 思路: 画图积分。

21. (1) $a = 3$; (2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 。

22. $\lambda = 5, \mu = 6$, 通解: $(-8, 7, 0)^T + k(-3, 4, 1)^T$ 。

四、证明题

23. 思路: $f(x)$ 单调、端点异号, 由零点定理与单调性得仅有一实根。

五、综合题

24. (1) 切线: $y = (1-e)x + e$; (2) 1; (3) 极小值 $y(t=1) = 0$ 。

25. (1) 面积 $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$; (2) 体积 $\pi(1 - \ln 2)$ 。