

一、单项选择题

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \sin \frac{1}{x} + (1-x)^{\frac{1}{x}} \right] = (\quad)$
 A. $1 + \frac{1}{e}$ B. $\frac{1}{e}$ C. $1 + e$ D. 1
2. 函数 $f(x, y) = \frac{\arccos(x^2 + y^2 - 1)}{\sqrt{x - y^2}}$ 的定义域为 ()
 A. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2, x > y^2\}$ B. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 2, x \geq y^2\}$
 C. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 2, x \geq y^2\}$ D. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 2, x < y^2\}$
3. 已知函数 $f(x) = \frac{\sin|x|}{\sqrt{1+x-1}}$, 则 $x=0$ 为 ()
 A. 连续点 B. 可去间断点 C. 跳跃间断点 D. 无穷间断点
4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos(ax), & x \geq 0 \\ bx, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 则 ()
 A. $a=0, b=0$ B. $a=0, b$ 为任意常数 C. a, b 为任意常数 D. $b=0, a$ 为任意常数
5. 下列数列中发散的是 ()
 A. $\left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n+1} \right\}$ B. $\left\{ \sin \frac{1}{n} \right\}$ C. $\left\{ \left(\frac{5}{6}\right)^n \right\}$ D. $\left\{ \ln \frac{1}{n} \right\}$
6. 设 $y = y(x)$ 由 $e^{x+y} - ex - \sin x = e$ 确定, 则在 $(0, 1)$ 处的法线方程为 ()
 A. $y = \frac{x}{e} + 1$ B. $y = -\frac{x}{e} + 1$ C. $y = ex + 1$ D. $y = -ex + 1$
7. 下列函数在 $[-1, 1]$ 上满足拉格朗日中值定理条件的是 ()
 A. $f(x) = |x|$ B. $f(x) = \ln(1+x)$ C. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ D. $f(x) = \arctan x$
8. 下列广义积分收敛的是 ()
 A. $\int_1^{+\infty} x e^{-x^2} dx$ B. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} dx$ C. $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ D. $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dx$
9. 下列区域 D 满足 $\iint_D dx dy = 1$ 的是 ()
 A. $x=0, y=0, 2x+y-2=0$ 围成 B. $|x| = \frac{1}{2}, |y| = \frac{1}{3}$ 围成
 C. $x=0, y=0, x=4, y=3$ 围成 D. $|x+y|=1, |x-y|=1$ 围成
10. 设 α, β 为向量, $\alpha\beta^T = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, 则 $\alpha^T\beta = (\quad)$
 A. -6 B. 0 C. 5 D. 1

11. 两次射击, 第一次中 10 环概率 0.5, 第一次中条件下第二次中概率 0.6, 则两次都中概率为 ()

A.0.25 B.0.3 C.0.36 D.0.6

12. 随机变量 X 密度 $f(x) = \begin{cases} 4e^{-4x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, 则 $E(X) = ()$

A.4 B. $\frac{1}{4}$ C. $-\frac{1}{16}$ D.16

二、填空题

13. $\int e^{2026x} dx = F(x) + C$, 则 $dF(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

14. 曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 与 $x=0, x=1, y=0$ 绕 x 轴旋转体积 $V_x = \underline{\hspace{2cm}}$

15. $f(x) = x^2 \ln x$, 则 $f''(e^\lambda) = \underline{\hspace{2cm}}$

16. 行列式 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$, 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$

17. 有放回取两球 (1-4), 编号之和不小于 6 的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$

18. $f(3+x) = f(3-x)$, $P(1 < x < 3) = 0.4$, 则 $P(x > 5) = \underline{\hspace{2cm}}$

三、解答题

19. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t^2 dt}{3 \ln(1+x^3)}$

20. 已知 $f(x) = 2^x$, 求 $\int (2-x)f''(x)dx$

21. 设 $z = z(x, y)$ 由 $e^z + yz + \sin x = 1$ 确定, 求 $dz|_{(0,0)}$

22. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 且 $AX + B = BA + X$, 求 X

23. 证明: 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $\arcsin x + \arcsin \sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$

24. 已知 $(2, -1, -1, 1)^T$ 为方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + ax_2 + 2ax_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + (3+a)x_2 + 2ax_3 + 5x_4 = 2 \end{cases}$$

的一个解.

(1) 求 a ;

(2) 求方程组的通解。

25. 四条流水线产量比 $2 : 3 : 4 : 5$, 次品率 $1\%, 2\%, 3\%, 3\%$, 随机抽 1 个。(1) 抽到来自丙线概率;

(2) 抽到是次品概率; (3) 若抽到是次品, 来自丙线概率。