专升本数学公式速查手册

T-Endless

1 函数与极限

1.1 常用初等函数公式

- 平方差: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- 完全平方: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- 立方和差: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
- 指数运算: $a^m \cdot a^n = a^{m+n},\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ (a^m)^n = a^{mn}$
- 对数运算: $\ln(ab) = \ln a + \ln b,\ \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- 对数换底: $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$

1.2 极限常用公式

- 重要极限 1: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- 重要极限 2: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- 等价无穷小 $(x \to 0)$: $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$
  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$
- 无穷小性质: 有界函数 $\times$ 无穷小 $=$ 无穷小

2 一元函数微分学

2.1 导数定义

导数定义: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

2.2 基本求导公式

- $(C)' = 0,\ (x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$
- $(e^x)' = e^x,\ (a^x)' = a^x \ln a$
- $((\ln x)' = \frac{1}{x},\ (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$
- $(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \sec^2 x,\ (\cot x)' = -\csc^2 x$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

2.3 求导法则

- 四则运算: $(u \pm v)' = u' \pm v',\ (uv)' = u'v + uv'$
  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\ (v \neq 0)$
- 复合函数: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- 微分: $dy = f'(x)dx$

2.4 微分中值定理

- 洛必达法则: $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$ 型 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$
- 罗尔定理: $\begin{cases} f(x) \text{ 在闭区间}[a,b] \text{ 上连续} \\ f(x) \text{ 在开区间}(a,b) \text{ 内可导} \\ f(a)=f(b) \end{cases}$ 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$
- 拉格朗日中值定理: $\begin{cases} f(x) \text{ 在}[a,b] \text{ 上连续} \\ f(x) \text{ 在}(a,b) \text{ 内可导} \end{cases}$ 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$
  等价形式：$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\Delta x$

3 一元函数积分学

3.1 不定积分定义

不定积分: $\int f(x)dx=F(x)+C$ $(F'(x)=f(x))$

3.2 基本积分公式

- $\int 0dx=C$, $\int x^\mu dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$ $(\mu\neq-1)$
- $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$, $\int e^x dx=e^x+C$
- $\int\sin xdx=-\cos x+C$, $\int\cos xdx=\sin x+C$
- $\int\sec^2 xdx=\tan x+C$, $\int\csc^2 xdx=-\cot x+C$
- $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$, $\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$

3.3 积分法则

- 分项积分: $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$
- 凑微分: $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=F(\varphi(x))+C$
- 分部积分: $\int udv=uv-\int vdu$

3.4 定积分公式

- 牛顿-莱布尼茨: $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$
- 几何意义: 曲线与 x 轴围成面积的代数和

4 多元函数微积分

4.1 偏导数

- 一阶偏导: $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$
- 二阶纯偏导: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$
- 二阶混合偏导: $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$
- 多元复合函数链式法则: 设 $z=f(u,v)$, $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

- 全微分: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

4.2 二重积分

- 直角坐标: $\iint_D f(x,y)d\sigma = \int\int f(x,y)dxdy$
- 几何意义: 曲顶柱体体积
- 旋转体体积（绕 x 轴）: $V_x = \pi\int_a^b y^2dx$
- 旋转体体积（绕 y 轴）: $V_y = 2\pi\int_a^b xydx$

5 线性代数

5.1 行列式

- 二阶行列式: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- 三阶行列式: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$
- n 阶行列式性质 1: 两行互换，行列式变号；一行全为 0，行列式 $=0$
- n 阶行列式性质 2: 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式等于 0
- n 阶行列式性质 3: 行列式的某一行（列）元素加上另一行（列）对应元素的 k 倍，行列式的值不变
- 方阵运算: $|AB| = |A||B|$, $|kA_{n\times n}| = k^n|A|$

5.2 矩阵

- 逆矩阵公式: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^*$, $AA^{-1} = E$
- 可逆充要条件: $|A| \neq 0 \iff A$ 满秩 $\iff A$ 可逆
- 伴随矩阵: $AA^* = A^*A = |A|E$
- 转置与逆: $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

5.3 向量与线性方程组

- 齐次方程组: $Ax = 0$ 有非零解 $\iff r(A) < n$
- 非齐次方程组: $Ax = b$ 有解 $\iff r(A) = r(\overline{A})$
- 线性相关: n 个 n 维向量相关 $\iff$ 行列式 $=0$
- 基础解系: 解向量极大无关组，个数 $= n - r(A)$

6 常微分方程（江苏）

6.1 一阶微分方程

- 可分离变量: $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \int\frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$
- 一阶线性: $y' + P(x)y = Q(x)$

- 通解公式: $y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)$

6.2 二阶常系数齐次线性微分方程

- 标准形式: $y'' + py' + qy = 0$
- 特征方程: $r^2 + pr + q = 0$
- 两个不等实根 $r_1 \neq r_2$: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
- 两个相等实根 $r_1 = r_2 = r$: $y = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$
- 一对共轭复根 $r = \alpha \pm \beta i$: $y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$

6.3 二阶常系数非齐次线性微分方程

- 标准形式: $y'' + py' + qy = f(x)$
- 通解结构: $\boldsymbol{y = Y + y^*}$
- Y: 对应的**齐次方程通解**, y^*: 非齐次**一个特解**
- 特解待定形式 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$: $y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$
  - λ 不是特征根: $k = 0$
  - λ 单特征根: $k = 1$
  - λ 二重特征根: $k = 2$

7 无穷级数（江苏）

7.1 常数项级数

- 等比级数: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$ $(|q| < 1)$
- p-级数: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 1$ 收敛, $p \leq 1$ 发散
- 收敛必要条件: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$
- 正项级数比较判别法: $0 < u_n \leq v_n$, $\sum v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum u_n$ 收敛; $\sum u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum v_n$ 发散
- 正项级数比值判别法: $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, $\rho < 1$ 收敛, $\rho > 1$ 发散, $\rho = 1$ 失效
- 交错级数莱布尼茨判别法: $u_n \searrow 0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛
- 绝对收敛与条件收敛: 绝对值级数收敛 $\Rightarrow$ 绝对收敛; 绝对值发散本身收敛 $\Rightarrow$ 条件收敛

7.2 幂级数

- 收敛半径公式: $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, $\quad R = \dfrac{1}{\rho}$
- 半径特殊情况: $\rho = 0 \Rightarrow R = +\infty$; $\quad \rho = +\infty \Rightarrow R = 0$
- 收敛区间: $(-R, R)$
- 收敛域: 收敛区间 $\pm \boldsymbol{R}$ 单独判别敛散
- 常用展开: $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

8 概率论（安徽）

8.1 随机事件与概率

- 对立事件概率: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- 加法公式: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
- 乘法公式: $P(AB) = P(A)P(B|A)\ (P(A) > 0)$
- 互斥事件: $AB = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- 独立事件: $P(AB) = P(A)P(B) \iff A, B$ 相互独立
- 古典概型: $P(A) = \dfrac{\text{事件}A\text{包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$

8.2 随机变量及其分布

- 离散型分布律性质: $\sum\limits_k P(X = x_k) = 1$
- 分布函数定义: $F(x) = P(X \le x)$，$-\infty < x < +\infty$
- 概率密度性质: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$，$P(a < X \le b) = \int_a^b f(x)dx$
- 分布函数性质: $0 \le F(x) \le 1$；单调不减；$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$
- 伯努利分布: $X \sim B(1,p)$，$P(X = k) = p^k(1-p)^{1-k}\ (k = 0, 1)$，$E(X) = p$，$D(X) = p(1-p)$
- 二项分布: $X \sim B(n,p)$，$P(X = k) = \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}\ (k = 0, 1, ..., n)$，$E(X) = np$，$D(X) = np(1-p)$
- 泊松分布: $X \sim P(\lambda)$，$P(X = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\ (k = 0, 1, 2, ..., \lambda > 0)$，$E(X) = \lambda$，$D(X) = \lambda$
- 均匀分布: $X \sim U(a,b)$，概率密度 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，$E(X) = \dfrac{a+b}{2}$，$D(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
- 指数分布: $X \sim E(\lambda)$，概率密度 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}\ (\lambda > 0)$，$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$，$D(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$
- 正态分布: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，概率密度 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ (-\infty < x < +\infty)$，$E(X) = \mu$，$D(X) = \sigma^2$

8.3 期望与方差

- 离散型期望: $E(X) = \sum\limits_k x_k P(X = x_k)$
- 连续型期望: $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$
- 方差公式: $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
- 期望性质: $E(aX + b) = aE(X) + b$；$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- 方差性质: $D(aX+b) = a^2 D(X)$; X, Y 独立 $\Rightarrow D(X+Y) = D(X) + D(Y)$