

一、单项选择题

1. 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{-3x+2} = (\quad)$
 A. e^6 B. $e^{\frac{3}{2}}$ C. e^{-6} D. $e^{-\frac{3}{2}}$
2. 设函数 $f(x) = \frac{x}{\arcsin x}$, 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 ()
 A. 连续点 B. 可去间断点 C. 跳跃间断点 D. 无穷间断点
3. 二元函数 $f(x, y) = \frac{\ln(x^2 + y^2 - 1)}{x - 2}$ 的定义域为 ()
 A. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 1, x < 2\}$ B. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 1, x \neq 2\}$
 C. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1, x < 2\}$ D. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1, x \neq 2\}$
4. 函数 $f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x^2, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处 ()
 A. 极限不存在 B. 极限存在但不连续 C. 连续但不可导 D. 可导
5. 已知 α, β 为常数, 若 $x \rightarrow 0^+$ 时, $1 - \cos x^\alpha$ 与 $\ln(1 + \beta x)$ 是等价无穷小, 则 ()
 A. $\alpha = 1, \beta = 1$ B. $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}$ C. $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1$ D. $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$
6. 曲线 $e^{2x+y} - xy = 1$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 ()
 A. $y = -2x$ B. $y = 2x$ C. $y = -\frac{1}{2}x$ D. $y = \frac{1}{2}x$
7. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, m 与 M 分别为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最小值和最大值, 则一定存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 ()
 A. $f(\xi) = \frac{m+M}{2}$ B. $f(\xi) = \frac{M}{2}$ C. $f(\xi) = \frac{M-m}{2}$ D. $f(\xi) = \frac{m}{2}$
8. 下列广义积分发散的是 ()
 A. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{e^x} dx$ B. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ C. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$ D. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx$
9. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 则 $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x) dx = (\quad)$
 A. $\int_0^1 x^2 f(x) dx$ B. $\int_0^1 (1+x^2) f(x) dx$ C. $\int_0^1 (1-x^2) f(x) dx$ D. $\int_0^1 (x^2 - 1) f(x) dx$
10. 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, 则下列向量组线性相关的是 ()
 A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ C. $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ D. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

11. 抛掷一枚质地均匀的硬币三次，观察正反，已知至少出现一次正面，则第一次为正面的概率是 ()
 A. $\frac{3}{8}$ B. $\frac{3}{7}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{4}{7}$
12. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0, \sigma^2) (\sigma > 0)$ ，且 $P(X \leq \alpha) + P(X \leq \alpha - 1) = 1$ ，则常数 $\alpha =$ ()
 A. 0 B. 0.2 C. 0.4 D. 0.5

二、填空题

13. 对函数 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 在区间 $[0, 1]$ 上应用拉格朗日中值定理，所求得的点 $\xi =$ _____
14. 曲线 $xy = 2$ 与 $x = 1, x = 2, y = 0$ 围成平面图形的面积为 _____
15. $y = e^x(1+x^2)$ ，则 $y''(0) =$ _____
16. 设 A 为三阶方阵，且 $|A| = 2$ ， A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $|4A^{-1} - A^*| =$ _____
17. 设 A, B 为两个随机事件， $P(A) = 0.3$ ， $P(AB) = 0.2$ ， $P(A \cup B) = 0.5$ ，则 $P(A|\bar{B}) =$ _____
18. 设随机变量 X 服从二项分布 $B(n, p)$ ，数学期望 $E(X) = 0.9$ ，方差 $D(X) = 0.63$ ，则 $P(X = 1) =$ _____

三、解答题

19. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} t \ln(1+t) dt}{x^3}$
20. 计算不定积分 $\int \frac{1}{x^2 + 2025x} dx$
21. 设二元函数 $\varphi(u, v)$ 可微， $z = \varphi(x + y^2, x^2y)$ ，求全微分 dz
22. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ，且 $AX - A^T = X$ ，求矩阵 X
23. 证明 $e^x - 2x \geq 2 - 2\ln 2$

24. 设线性方程组
$$\begin{cases} -x_1 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = b \end{cases}$$
 有解, 求: (1) 常数 a, b 的值; (2) 求此线性方程组的通解

25. 设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x) = \begin{cases} a(1 - |x|), & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中 a 为常数: (1) 求 a 的值; (2) 求数学期望 $E(X)$ 及 $P\{X > E(X)\}$