

一、选择题 (共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

1. $f(x) = x^4 \sin \frac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{1+2x^3} - 1$, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 () 无穷小.

- A. 高阶 B. 低阶 C. 同阶 D. 等价

2. 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x} & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \frac{\tan x - \sin x}{x^2} & x > 0 \end{cases}$, 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 ().

- A. 可去间断点 B. 跳跃间断点 C. 无穷间断点 D. 连续点

3. 设 $f(x) = \frac{1}{3-2x}$, 正整数 n , 则 $f^{(n)}(1) = ()$.

- A. $\frac{2^n n!}{3^{n+1}}$ B. $\frac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$ C. $(-1)^n 2^n n!$ D. $2^n n!$

4. 曲线 $y = x^2 \left(1 - e^{\frac{1}{2x^2}}\right)$ 的渐近线方程为 ().

- A. $y = \frac{1}{2}$ B. $y = -\frac{1}{2}$ C. $y = 2$ D. $y = -2$

5. 已知 $\int_1^{+\infty} x e^{-ax^2} dx = e^{-a}$, 则 $a = ()$.

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. -2

6. 判别下列级数绝对收敛的是 ().

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \left(n\pi + \frac{2}{3n}\right)$

7. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, 则下列可逆的是 ().

- A. $2A + B$ B. $A - 2B$ C. $A^2 B$ D. AB^2

8. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3$, $\alpha_1 + 4\alpha_2 + 5\alpha_3$, $2\alpha_1 + k_1\alpha_2 + k_2\alpha_3$ 线性无关, 求 k_1, k_2 ().

- A. $2k_1 + k_2 = 6$ B. $2k_1 - k_2 = 6$ C. $k_1 + 2k_2 = 6$ D. $2k_2 - k_1 = 6$

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 设 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, $f(1) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f^2(1)}{x^2 - 1} = 2$, 则 $f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$

10. 已知 $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$, 则 $f(x)$ 的拐点为 _____

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} \right)^{x^2} =$ _____

12. 设二阶可导函数 $y(x)$ 满足方程 $y'' - 2\sqrt{a}y' + ay = 0$, 且 $y(0) = 0, y'(0) = a$, 则 $y(x) =$ _____

13. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \cos n}{3^n} x^n$ 的收敛半径为 _____

14. 向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ k^2 + k \end{pmatrix}$. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为极大线性无关组, 则 $k =$ _____

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1 - x^2)}{\sin x - x \cos x}$

16. 求不定积分 $\int (1 + x) \arctan x dx$

17. 已知 $f(x)dx = d(\arcsin x)$, 求 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - x}{f(x)} dx$

18. 已知 $f'(x) + 2xf(x) = 0$, 且 $f(0) = 1$, 求 $y' + (2x + 1)y = f(x)$ 的通解.

19. 设二元函数 $z = \frac{1}{x} f(x - 2y, x^2y)$, 其中函数 f 具有一阶连续偏导数, 求全微分 dz .

20. 计算二重积分 $\iint_D x e^y dx dy$, 其中 D 由曲线 $y = \ln(x + 1)$ 与两直线 $y = -x, x = 1$ 所围成的闭区域.

21. 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, 求:

(1) 已知 A 的秩为 2, 求 a ;

(2) 若 B 满足 $AB - B = E$, E 为三阶单位矩阵, 求 B .

22. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - \lambda x_3 = \mu \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = \lambda \end{cases}$$

有解, λ, μ 为常数, 求线性方程组的解.

四、证明题 (本大题共 1 小题, 每小题 10 分, 共 10 分)

23. 设 $f(x) = x^5 - 5x - 6$, 证明: $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 内仅有一实根.

五、综合题 (本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分)

24. 设函数 $y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = t^5 + t + 1 \\ y = e^t - et \end{cases}$ 所确定, 求:

(1) $\frac{dy}{dx}$ 以及函数在 $t = 0$ 处的切线;

(2) $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=0}$;

(3) $y(x)$ 的极值.

25. $f(x)$ 的一个原函数为 $e^x(\sin x + \cos x)$, $y = \frac{f'(x)}{f(x)}$, 平面图形 D 由 y 与 x 轴, y 轴所围成, $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

(1) 求平面图形 D 的面积;

(2) 求平面图形 D 绕 x 轴旋转的旋转体体积.