一、题型总结

1. 导数概念类题型

1. 导数定义判断可导性
2. 左导数、右导数计算与可导判定
3. 可导与连续关系的判断
4. 导数几何意义：切线、法线方程求解

2. 导数计算类题型

1. 基本初等函数求导
2. 四则运算求导
3. 复合函数链式求导
4. 分段函数分段点求导
5. 隐函数求导

3. 微分与高阶导数题型

1. 二阶及简单高阶导数计算
2. 微分定义与微分计算
3. 可微与可导关系判定

二、解题方法

1. 可导性判断方法

1. 先判断连续性：可导必先连续
2. 分段点必求左导数、右导数
3. 可导充要条件：左导数 = 右导数
4. 有尖点、折点的连续函数不可导（如 $y = |x|$）

2. 导数计算核心方法

1. **基本公式法**：熟记常数、幂、指数、三角导数
2. **四则运算法**：和差积商按公式直接套用
3. **链式法则**：由外向内，逐层求导，不漏层
4. **隐函数求导**：两边对 x 求导，含 y 项乘 y'，解出 y'

3. 微分与高阶导数方法

1. 微分计算：$dy = f'(x)dx$，先求导再乘 dx
2. 可微 $\Leftrightarrow$ 可导
3. 高阶导数：逐次求导，记住 e^x、$\sin x$ 规律
4. 微分形式不变性：无论中间变量/自变量，形式一致

三、核心公式速记表

知识点	**公式/结论**
导数定义	$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
可导充要条件	$f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$
可导与连续	可导 $\Rightarrow$ 连续；连续 $\nRightarrow$ 可导
切线方程	$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$
法线方程	$y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ $(f'(x_0) \neq 0)$
链式法则	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$
基本求导公式	$(e^x)' = e^x$，$(\sin x)' = \cos x$，$(\cos x)' = -\sin x$
微分公式	$dy = f'(x)dx$，可微 $\Leftrightarrow$ 可导

四、经典例题

题型 1：导数定义与分段函数可导性

例 1

设

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

讨论 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性与可导性。

解：

1. 连续性：

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$$

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。

2. 可导性（导数定义）：

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

极限存在，故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导，且 $f'(0) = 0$。

例 2

设

$$f(x)=\begin{cases} e^{x^3}-1+ax, & x<0 \\ \ln(1+x)+bx^2, & x\geq 0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处可导，求 a,b。

解：

可导必先连续：

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}(e^{x^3}-1+ax)=0, \quad \lim_{x\to 0^+}(\ln(1+x)+bx^2)=0$$

连续条件自动满足。

再求左右导数：

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{x^3}-1+ax}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x^3}{x}+a\right)=a$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)+bx^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{x}+bx\right)=1$$

可导 $\Rightarrow f'_-(0)=f'_+(0)\Rightarrow a=1$。$b$ 不影响导数，任意实数均可。

例 3

已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=2$，求 $f'(0)$。

解：

利用导数定义拆分：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-[f(-x)-f(0)]}{x}=2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{-x}=2$$

即 $f'(0)+f'(0)=2\Rightarrow 2f'(0)=2\Rightarrow f'(0)=1$。

题型 2：复杂求导（复合 + 隐函数 + 高阶）

例 4

求 $y=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 的导数。

解：

复合求导：

$$y'=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'$$

化简分母：

$$1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2=\frac{(1-x)^2+(1+x)^2}{(1-x)^2}=\frac{2(1+x^2)}{(1-x)^2}$$

分式求导：

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{2}{(1-x)^2}$$

代入得：

$$y' = \frac{(1-x)^2}{2(1+x^2)} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

例 5

设 $y = y(x)$ 由 $e^{xy} + \ln(x^2+y^2) = 1$ 确定，求 y'。

解：

两边对 x 求导：

$$e^{xy} \cdot (y + xy') + \frac{2x+2yy'}{x^2+y^2} = 0$$

整理含 y' 项：

$$y'\left(xe^{xy} + \frac{2y}{x^2+y^2}\right) = -ye^{xy} - \frac{2x}{x^2+y^2}$$

解得：

$$y' = -\frac{ye^{xy}(x^2+y^2)+2x}{xe^{xy}(x^2+y^2)+2y}$$

例 6

设 $y = \sin^2 x \cdot e^{-2x}$，求其二阶导数 y''。

解：

一阶导数（积法则）：

$$y' = 2\sin x\cos x \cdot e^{-2x} + \sin^2 x \cdot (-2e^{-2x})$$

$$y' = e^{-2x}\left(\sin 2x - 2\sin^2 x\right)$$

二阶导数：

$$y'' = -2e^{-2x}(\sin 2x - 2\sin^2 x) + e^{-2x}(2\cos 2x - 4\sin x\cos x)$$

化简：

$$y'' = 2e^{-2x}\left(-\sin 2x + 2\sin^2 x + \cos 2x - \sin 2x\right)$$

$$y'' = 2e^{-2x}\left(\cos 2x - 2\sin 2x + 2\sin^2 x\right)$$

题型 3：微分与几何综合

例 7

求曲线 $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与法线方程。

解：

隐函数求导：

$$2x + 2(y + xy') - 2yy' = 2$$

代入 $(1,1)$：

$$2 + 2(1 + y') - 2y' = 2 \Rightarrow 4 = 2 \quad (?) \quad \text{整理式子：}$$

$$2 + 2y + 2xy' - 2yy' = 2 \Rightarrow y'(2x - 2y) = 2 - 2x - 2y$$

$$y' = \frac{1 - x - y}{x - y}$$

代入 $(1,1)$：

$$y'(1) = \frac{1 - 1 - 1}{1 - 1} = \frac{-1}{0} \Rightarrow \text{垂直切线}$$

切线：$x = 1$；法线：$y = 1$。

例 8

求 $y = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$ 的微分 dy。

解：

先化简：

$$y = \frac{1}{2} [\ln(1 + \sin x) - \ln(1 - \sin x)]$$

求导：

$$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\cos x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

微分：

$$dy = \sec x \ dx$$

例 9

设 $f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$，求 $f'''(x)$。

解：

一阶：

$$f'(x) = (2x + 3)e^{-x} - (x^2 + 3x + 1)e^{-x} = (-x^2 - x + 2)e^{-x}$$

二阶：

$$f''(x) = (-2x - 1)e^{-x} - (-x^2 - x + 2)e^{-x} = (x^2 - x - 3)e^{-x}$$

三阶：

$$f'''(x) = (2x - 1)e^{-x} - (x^2 - x - 3)e^{-x} = (-x^2 + 3x + 2)e^{-x}$$

五、强化训练习题

一、填空题

1. 设 $f(x) = \cos^3 2x$，则 $f'(x) =$ ____
2. 设 $y = \ln \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$，则 $y' =$ ____
3. 曲线 $y = \frac{x}{1 + x^2}$ 在 $x = 1$ 处切线斜率为 ____

4. 设 $y=e^{\arcsin\sqrt{x}}$，则 $dy=$____

5. 设 $y=y(x)$ 由 $y=1+xe^y$ 确定，则 $y'(0)=$____

6. 设 $f(x)=x^2\ln x$，则 $f''(1)=$____

7. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ ax+b, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 可导，则 $a=$____，$b=$____

8. 设 $y=\tan^2(1-x)$，则 $y'=$____

9. 已知 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，则 $f''(x)=$____

10. $d\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)=$____

二、解答题

1. 设

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{\ln(1+x)}-\dfrac{x}{\ln(1+x)}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性。

2. 求 $y=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$ 的一阶与二阶导数。

3. 设 $y=y(x)$ 由 $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 确定，求 y' 。

4. 求 $y=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$ 的导数。

5. 设 $y=\ln(\sin^2 x+\cos^2 2x)$，求 y' 。

6. 设 $y=e^{-x}\sin 3x$，求 y'' 。

7. 求曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 在点 $(\dfrac{a}{4},\dfrac{a}{4})$ 处的切线方程。

8. 设 $f(x)$ 是可导的多项式函数，且 $f(\sin x)+f(\cos x)=1$，求 $f'(x)$ 。

9. 求 $y=\dfrac{x^3}{1-x}$ 的 n 阶导数（写出前四阶并总结规律）。

10. 设 $y=y(x)$ 由 $x^3+y^3-3axy=0$ 确定，求 y' 与 y'' 。