

## 一、单项选择题 (共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = ( \quad )$   
 A.  $e^{a-b}$     B.  $e^{b-a}$     C.  $e^{\frac{a}{b}}$     D.  $e^{\frac{b}{a}}$
2. 设  $f(x) = 1 - \cos(1 - \cos x)$ ,  $g(x) = \sin^n(\sin^n x)$ , 若当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  与  $g(x)$  为同阶无穷小, 则正整数  $n = ( \quad )$   
 A. 1    B. 2    C. 3    D. 4
3. 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0 f(x) - x f(x_0)}{x - x_0} = ( \quad )$   
 A.  $x_0 f'(x_0) - f(x_0)$     B.  $f(x_0) - x_0 f'(x_0)$     C.  $f'(x_0) - x_0 f(x_0)$     D.  $x_0 f(x_0) - f'(x_0)$
4. 曲线  $y = x \sin \frac{1}{x-1}$  的渐近线方程为 ( )  
 A.  $x = 0$     B.  $y = 0$     C.  $x = 1$     D.  $y = 1$
5. 设  $f(x) = x \int_0^x \cos t^2 dt$ , 则  $f''(0) = ( \quad )$   
 A. 0    B. 1    C. 2    D. 3
6. 设  $k$  为常数, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^k \frac{1}{\sqrt{n}}$  条件收敛的充分必要条件是 ( )  
 A.  $0 < k \leq 1$     B.  $1 < k < +\infty$     C.  $0 < k \leq 2$     D.  $2 < k < +\infty$
7. 设  $A, B$  为同阶方阵, 且  $AB = A - B$ , 则一定可逆的矩阵为 ( )  
 A.  $A + E$  与  $B + E$     B.  $A + E$  与  $B - E$     C.  $A - E$  与  $B + E$     D.  $A - E$  与  $B - E$
8. 设向量组  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} k \\ k-1 \\ 1 \end{pmatrix}$  线性相关, 而向量组  $\beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$  线性无关, 则常数  $k = ( \quad )$   
 A. -3    B. -1    C. 1    D. 3

二、填空题 (共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9.  $x = 0$  是函数  $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} & x < 0 \\ \frac{\sin kx}{x} & x > 0 \end{cases}$  的可去间断点, 则常数  $k =$  \_\_\_\_\_

10. 设函数  $y = (2 + \cos x)^x$ , 则  $dy|_{x=0} =$  \_\_\_\_\_

11. 设函数  $g(x) = f^2(2x-3)$ , 其中  $f(x)$  是可导函数, 若  $f'(3) = 2$ ,  $g'(3) = 16$ , 则  $f(3) =$  \_\_\_\_\_

12. 若  $x = 0$  是函数  $f(x) = (x+a)e^x$  ( $a$  为常数) 的极值点, 则曲线  $y = f(x)$  的拐点坐标为 \_\_\_\_\_

13. 设  $a, b$  为常数, 且  $a > 0$ , 若幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} (x-b)^n$  的收敛区间为  $(-5, 3)$ , 则  $a-b =$  \_\_\_\_\_

14. 设矩阵  $X$  满足方程  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 5 & 9 & -4 \end{pmatrix}$ , 则  $X =$  \_\_\_\_\_

三、计算题 (共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

15. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x [\ln(e-t) - 1] dt}{\sqrt{1+x^3} - 1}$

16. 求不定积分  $\int \frac{x^3 + 4}{x^2 \sqrt{4-x^2}} dx$

17. 求定积分  $\int_0^1 \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x^3 + 1} dx$

18. 求微分方程  $(x+1)y' + y = x \cos x$  满足初始条件  $y(0) = 1$  的特解

19. 已知  $z = f(x, y)$  是由方程  $e^z - 2xz - 3yz = e$  所确定的函数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}}$

20. 求二重积分  $\iint_D (x^2 + \sin x \cos y) dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 1 - x$  与  $y = 1 + x$  及  $x$  轴所围成的闭区域

21. 设  $A, B, C$  均为 4 阶方阵, 满足  $AB = C$ , 已知  $|A| = 3$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ , 求  $|B|$

22. 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 7x_3 + kx_4 = k \end{cases}$$

(其中  $k$  为常数) 有无穷多解, 求其通解。

#### 四、证明题 (本题 10 分)

23. 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上具有二阶导数, 且  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 0$ , 证明:

- (1) 在开区间  $(0, 1)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得  $f'(\xi) = -1$ ;
- (2) 在开区间  $(0, 1)$  内至少存在一点  $\eta$ , 使得  $f'(\eta) + \eta f''(\eta) = -1$ 。

#### 五、综合题 (共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分)

24. 设  $D$  是由抛物线  $y = x^2$  与  $y = (x - 2)^2$  及  $x$  轴所围成的平面图形, 求:

- (1)  $D$  的面积;
- (2)  $D$  绕  $x$  轴旋转一周的体积;
- (3)  $D$  绕  $y$  轴旋转一周的体积。

25. 设二阶可导函数  $f(x)$  满足方程  $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ , 求  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 。