



一、单项选择题

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 比 $2x$ 高阶的无穷小量为 ()
 A. $\arcsin x^2$ B. $\tan x$ C. $\ln(1 + \sqrt[3]{x})$ D. $e^{2x} - 1$
2. 若点 $(1, 0)$ 为曲线 $y = x^3 - ax^2 + bx$ 的拐点, 则 ()
 A. $a = 2, b = 1$ B. $a = -1, b = -2$ C. $a = 3, b = 2$ D. $a = -2, b = -3$
3. 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$ 的间断点为 ()
 A. $x = -1, x = 2$ 均第一类 B. 均第二类
 C. $x = -1$ 第一类, $x = 2$ 第二类 D. $x = 2$ 第一类, $x = -1$ 第二类
4. 函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ 在 $(-1, 1)$ 内 ()
 A. 单调递增 B. 单调递减 C. 有极大值 D. 有极小值
5. 曲线 $x^2 + xy - 2y^2 = 0$ 在 $(-2, 1)$ 处的法线方程为 ()
 A. $x - 2y + 4 = 0$ B. $x + 2y = 0$ C. $2x - y + 5 = 0$ D. $2x + y + 3 = 0$
6. 下列曲线在 $(-\infty, +\infty)$ 内是凹的是 ()
 A. $y = x^4 - 2x^2$ B. $y = \cos x$ C. $y = 2x - x^2$ D. $y = e^{-x}$
7. 设 $\int f(x)dx = F(x) + C$, 成立的是 ()
 A. $\int f(3x - 1)dx = F(3x - 1) + C$ B. $\int f(e^x)e^x dx = F(e^x) + C$
 C. $\int f(\ln 2x) \frac{1}{2x} dx = F(\ln 2x) + C$ D. $\int f(x^2)dx = F(x^2) + C$
8. 下列广义积分发散的是 ()
 A. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ B. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ C. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ D. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$
9. 已知 $z = \frac{x-y}{e^x}$, 则 ()
 A. $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ B. $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
 C. $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = -z$ D. $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -z$
10. $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, 向量组线性相关的是 ()

A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ C. $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ D. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

11. 12 球: 8 白 4 黄, 不放回, 第一次取到白的情况下, 第二次取到白的概率为 ()

A. $\frac{14}{33}$ B. $\frac{7}{11}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{8}{11}$

12. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $P(X \leq -1) = P(X \geq 3) = 0.023$, $P(X \leq 2) = 0.841$ 则 $P(0 \leq X \leq 3) = ()$

A. 0.272 B. 0.682 C. 0.818 D. 0.954

二、填空题

13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^{2x-1} = \underline{\hspace{2cm}}$

14. $D: \frac{1}{2} \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq 2$, 则 $\iint_D x^2 y \, dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$

15. $f'(2) = 1, z = f\left(\frac{x}{y}\right)$, 则 $dz|_{(2,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$

16. 行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

17. 设 A, B 为随机事件, $P(A) = 0.6, P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.7$, 则 $P(A - B) = \underline{\hspace{2cm}}$

18. 若随机变量 $\xi \sim P(1)$, 方程 $X^2 + 4X + 4\xi = 0$ 有实根的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$

三、解答题

19. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \arctan t \, dt}{x^2(1 - \cos x)}$

20. 已知函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导, 且 $xf'(x) + 2f(x) = 0$, 证明: $x^2 f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内恒为常数.

21. 计算定积分 $\int_{-1}^1 \left(\frac{1 - e^x}{1 + e^x} + xe^x \right) dx$

22. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, 且 $AX = B$, 求矩阵 X .

23. 设 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, D 由 $y = \sin x, y = \cos x$ 及 y 轴围成.

(1) 求 D 的面积;

(2) 求 D 绕 x 轴旋转一周的体积.

24. 当 λ 取何值时, 方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10 \\ 5x_1 + 13x_2 + 4x_3 + 8x_4 = \lambda \end{cases}$$

有无穷多解, 并求通解.

25. 设随机变量 X 的密度 $f(x) = \begin{cases} ax, & 0 \leq x < 2 \\ 3 - x, & 2 \leq x < 3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

(1) 求常数 a ;

(2) 求数学期望 $E(X)$.