



1 函数的概念与性质

1.1 函数的基本定义

1.1.1 核心定义

设有两个变量 x 和 y ，若对 x 在某一范围内的**每一个确定值**，按照某一对应法则， y 都有**唯一确定的值**与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为

$$y = f(x)$$

- x : 自变量
- y : 因变量
- 定义域: x 的取值范围
- 值域: y 的取值范围

1.1.2 函数的四大性质（专升本必考）

性质	数学表达	直观理解
有界性	$ f(x) \leq M$	图像夹在两条水平线之间
单调性	递增: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ 递减: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	图像从左到右上升 图像从左到右下降
奇偶性	偶函数: $f(-x) = f(x)$ 奇函数: $f(-x) = -f(x)$	关于 y 轴对称 关于原点对称
周期性	$f(x + T) = f(x)$	图像重复出现

1.2 几类重要函数

1.2.1 分段函数

在定义域不同区间上，用不同式子表示的函数。

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$$

关键点：分段点单独讨论。

1.2.2 复合函数

若 $y = f(u)$ ， $u = \varphi(x)$ ，则复合函数为

$$y = f[\varphi(x)]$$

步骤：先内后外，逐层代入。

1.2.3 反函数

若由 $y = f(x)$ 可解出 $x = f^{-1}(y)$, 则 $x = f^{-1}(y)$ 为反函数, 习惯写为

$$y = f^{-1}(x)$$

图像性质: $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 关于直线 $y = x$ 对称。

1.2.4 隐函数

由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的函数, 如

$$x^2 + y^2 = 1$$

特点: y 没有明显解出来。

1.3 基本初等函数与初等函数

1.3.1 基本初等函数 (6 大类)

- 常数函数: $y = C$
- 幂函数: $y = x^\mu$
- 指数函数: $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$
- 对数函数: $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$
- 三角函数: $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$
- 反三角函数: $\arcsin x, \arccos x, \arctan x$

1.3.2 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算得到, 能用一个式子表示的函数。绝大多数专升本考题都围绕初等函数展开。

2 极限的概念与运算法则

2.1 数列极限

2.1.1 直观定义

若当 n 无限增大时, x_n 无限接近一个常数 A , 则称 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限, 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$$

2.2 函数极限

2.2.1 两种趋势

- $x \rightarrow x_0$: 自变量趋近于某一点
- $x \rightarrow \infty$: 自变量趋向无穷大

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

2.2.2 左右极限

• 左极限: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

• 右极限: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

极限存在的充要条件:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$$

2.3 极限四则运算法则

设 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 则

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$$

$$\lim[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

适用前提: 两个极限都存在。

3 无穷小量与无穷大量

3.1 无穷小量

若 $\lim f(x) = 0$, 则称 $f(x)$ 为该过程下的无穷小量。

3.1.1 无穷小性质

- 有限个无穷小之和仍是无穷小
- 有限个无穷小之积仍是无穷小
- 有界函数乘无穷小仍是无穷小

3.2 无穷大量

若 $|f(x)|$ 无限增大, 则称 $f(x)$ 为无穷大量, 记 $\lim f(x) = \infty$ 。

3.2.1 无穷小与无穷大的关系

在同一过程中:

$$f(x) \text{ 无穷大} \iff \frac{1}{f(x)} \text{ 无穷小}$$

3.3 无穷小的比较

设 α, β 都是无穷小:

关系	条件
高阶无穷小	$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$
同阶无穷小	$\lim \frac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$
等价无穷小	$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 记 $\alpha \sim \beta$

3.4 常用等价无穷小 ($x \rightarrow 0$)

$$\sin x \sim x, \quad \tan x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \arctan x \sim x$$

$$\ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad (1+x)^a - 1 \sim ax$$

使用原则：乘除可换，加减慎用。

4 极限存在准则与两个重要极限

4.1 夹逼准则

若 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 且 $\lim g(x) = \lim h(x) = A$, 则

$$\lim f(x) = A$$

4.2 单调有界准则

单调有界数列必有极限。

4.3 两个重要极限 (专升本必考)

4.3.1 第一个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

适用：三角函数、零比零型。

4.3.2 第二个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

适用： 1^∞ 型极限。

5 函数的连续性

5.1 连续的定义

函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处连续, 满足三条:

1. $f(x)$ 在 x_0 有定义

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在

3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

5.2 间断点及其类型

5.2.1 第一类间断点

左右极限都存在：

- 可去间断点：左右极限相等
- 跳跃间断点：左右极限不相等

5.2.2 第二类间断点

左右极限至少一个不存在（无穷、振荡等）。

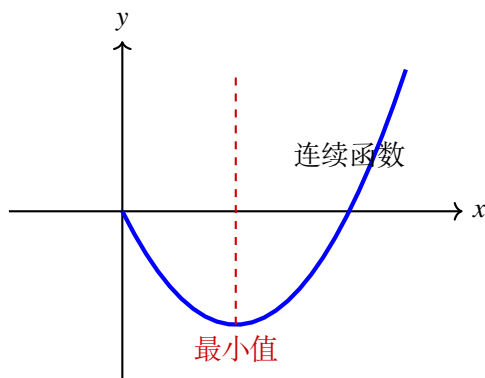
5.3 初等函数的连续性

一切初等函数在其定义区间内都是连续的。求连续点极限：直接代入。

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

5.4 闭区间上连续函数的性质

- 最值定理：必有最大值、最小值
- 有界定理：必有界
- 介值定理：介于最值之间的值必能取到
- 零点定理： $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists \xi \in (a, b), f(\xi) = 0$



6 典型例题

6.1 求极限（代入法）

题目： $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + 3)$

解：连续函数直接代入

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + 3) = 1 + 2 + 3 = 6$$

6.2 等价无穷小替换

题目: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}$

解: $\tan 2x \sim 2x, \sin 5x \sim 5x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$$

6.3 重要极限

题目: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

解:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$$

7 章节总结 & 考试重点

7.1 安徽专升本高频考点

1. 求定义域、判断奇偶性、单调性
2. 复合函数分解、分段函数讨论
3. 极限计算: 代入、约分、等价无穷小、重要极限
4. 无穷小比较、等价替换
5. 连续与间断点类型判断
6. 闭区间连续函数性质 (零点定理常考证明)

7.2 核心公式速记表

内容	公式
极限存在	左极限 = 右极限
四则运算	和差积商极限 = 极限和差积商
等价无穷小	$\sin x \sim x, \tan x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
重要极限	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$
连续条件	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
零点定理	$f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists \xi, f(\xi) = 0$