



一、选择题 (共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

1. 若 $x = 1$ 是函数 $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - a}$ 的第一类间断点, 则 $ab = ()$
 A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
2. 设函数 $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, 若当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) - \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 是 ax^k 的等价无穷小, 则 a, k 依次为
 ()
 A. 2, 1 B. 1, 2 C. $\frac{1}{2}, 1$ D. $\frac{1}{2}, 2$
3. 设 $dy = \frac{1}{1+x} dx$, 则 $f^{(2023)}(0) = ()$
 A. -2022! B. 2022! C. -2023! D. 2023!
4. 若 $f(x)$ 的一个原函数为 $\sin 2x$, 则 $f'(1) = ()$
 A. $2 \cos 2$ B. $-\frac{1}{2} \cos 2$ C. $-2 \sin 2$ D. $-4 \sin 2$
5. 设 $f(x+y, x-y) = x^2 - y^2$, 则 $f'_u(2, 0), f'_v(2, 0)$ 依次为 ()
 A. 2, -2 B. 2, 2 C. 0, 2 D. 4, 0
6. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n}$ 发散, 则 ()
 A. $0 < p < 1$ B. $0 < p \leq 1$ C. $p > 1$ D. $p \geq 1$
7. $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $r(A) = 2$, 则 $a = ()$
 A. -2 B. -1 C. 0 D. 1
8. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\alpha_1 + k\alpha_2, \alpha_2 + k\alpha_3, \alpha_3 + k\alpha_1$ 线性相关 $\iff ()$
 A. $k \neq 1$ B. $k \neq -1$ C. $k = 1$ D. $k = -1$

二、填空题 (共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. $f(x) = x \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sin 2x - \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

10. 直线 $y = 3x + m$ 是 $\begin{cases} x = t^2 - t + 1 \\ y = t^2 + t - 1 \end{cases}$ 的切线, 则 $m =$ _____

11. $f(x)$ 可导奇函数, $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{2}{n}\right) = 1$, 则 $f'(0) =$ _____

12. $y = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt$, 则 $\left. \frac{dx}{dy} \right|_{x=1} =$ _____

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{na^n}$ 收敛域 $[-3, 1)$, 则 $a =$ _____

14. $|A| = 4$, $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $|B| =$ _____

三、计算题 (共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x + 2 \cos x - 2}{x^2 - x^2 \cos x}$

16. 已知 $\int x f(x) dx = x^2 \arctan x + C$, 求 $\int f(x) dx$

17. 计算 $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$

18. 由 $z^3 - 3xz + 6y = 1$ 确定 $z = z(x, y)$, 求 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}}$

19. 已知 $y = xe^x$ 是 $y'' + py' + qy = -e^x$ 的特解, 求满足 $y(0) = 1, y'(0) = 2$ 的特解

20. 计算 $\iint_D (2y - \cos x) dx dy$, $D: y = \cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right), x = \frac{\pi}{2}, y = 1$ 围成

21. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, 求 X 使 $AX = A - X$

22. λ 取何值时, 方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = \lambda + 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有解, 并求解。

四、证明题 (10 分)

23. 证明: 当 $x > 0$ 时, $\sin x + \cos x > 1 + x - x^2$

五、综合题 (共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分)

24. $f(x) = \frac{ax^2 + 2x - 1}{x^2 + bx + 1}$, $x = 1, y = 0$ 为渐近线。求:

(1) a, b ; (2) 凹凸区间与拐点。

25. $f(x) > 0$ 连续, $f(0) = 1$, 面积 $A(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}f(t)$, $V(t)$ 为绕 y 轴旋转体体积, 求 $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t)$