



## 一、题型总结

### 1. 函数类题型

1. 求函数定义域 (分式、根式、对数、三角/反三角)
2. 判断函数奇偶性、单调性、周期性
3. 复合函数分解与代入求值
4. 分段函数分段点极限与连续性讨论

### 2. 极限计算类题型

1. 直接代入法 (连续函数)
2. 约分/有理化消去零因子
3. 等价无穷小替换求极限
4. 重要极限求解  $\frac{0}{0}$  型、 $1^\infty$  型极限
5. 无穷小阶的比较 (高阶、同阶、等价)

### 3. 连续与间断类题型

1. 判定函数在某点的连续性
2. 求间断点并判断类型
3. 零点定理证明方程根的存在性



## 二、解题方法

### 1. 定义域求解方法

1. 分母  $\neq 0$ ; 偶次根式被开方数  $\geq 0$
2. 对数函数真数  $> 0$
3. 反三角函数有自身定义域限制
4. 分段函数: 各段分别求定义域, 最后取并集

### 2. 极限计算核心方法

1. 直接代入法: 初等函数连续, 直接代入  $x_0$
2. 等价无穷小替换:  $x \rightarrow 0$  时, 乘除结构直接替换

#### 3. 重要极限法:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (适用:  $\frac{0}{0}$  型、三角函数)
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  (适用:  $1^\infty$  型)

4. 左右极限法: 分段函数、绝对值函数在分段点必用

### 3. 连续与间断判断

1. 连续三条件: 有定义  $\rightarrow$  极限存在  $\rightarrow$  极限值 = 函数值
2. 第一类间断点: 左右极限**都存在**
  - 可去间断点: 左右极限相等
  - 跳跃间断点: 左右极限不相等
3. 第二类间断点: 左右极限**至少一个不存在** (无穷、振荡)



## 三、核心公式速记表

知识点	公式/结论
极限存在充要条件	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$
极限四则运算	$\lim(f \pm g) = \lim f \pm \lim g, \lim(f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g$
常用等价无穷小 ( $x \rightarrow 0$ )	$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x$ $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$
两个重要极限	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
连续定义	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
零点定理	$f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists \xi \in (a, b), f(\xi) = 0$

## 四、经典例题

## 题型 1: 等价无穷小与泰勒综合

## 例 1

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2 \ln(1+x)}$$

解:

$$\tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x) \sim x \cdot \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^3, \quad \ln(1+x) \sim x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2 \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3} = \frac{1}{2}$$

## 例 2

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x^2 \arcsin x}$$

解:

$$e^{\sin x} - e^{\tan x} = e^{\tan x}(e^{\sin x - \tan x} - 1) \sim \sin x - \tan x \sim -\frac{1}{2}x^3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x^2 \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^3}{x^3} = -\frac{1}{2}$$



## 例 3

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x^2}$$

解: 分子有理化

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x \sin x) - \cos x}{x^2(\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos x) + x \sin x}{2x^2} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + x^2}{2x^2} = \frac{3}{4}$$

题型 2: 重要极限  $1^\infty$  型

## 例 4

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{x^3}}$$

解:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{\tan x - \sin x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{x^3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}} = e^{\frac{1}{2}}$$

## 例 5

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right)^x$$

解:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \sin \frac{2}{x} \right)^{\frac{x}{2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} \sin \frac{2}{x}} = e$$

## 例 6

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$$

解:

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx} - n}{nx}} = e^{\frac{1+2+\dots+n}{n}} = e^{\frac{n+1}{2}}$$

## 题型 3: 分段函数、连续性与间断点

## 例 7

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}, & x < 0 \\ 4, & x = 0 \text{ 在 } x = 0 \text{ 连续, 求 } a, b. \\ \frac{\ln(1+bx)}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

解:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax}{\sqrt{\frac{1}{2}x^2}} = -\sqrt{2}a = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = b = 4$$

得  $a = -2\sqrt{2}, b = 4$ 。

## 例 8

$$\text{求 } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x(x-1)} \text{ 的间断点并分类。}$$

解:  $x = 0$  (第二类无穷间断点);  $x = 1$  (第一类可去间断点)。



## 例 9

证明方程  $x^3 + 2x - 1 = 0$  至少有一个小于 1 的正根。

解: 令  $f(x) = x^3 + 2x - 1$ ,  $f(x)$  在  $[0, 1]$  连续,  $f(0) = -1, f(1) = 2$ , 由零点定理得证。

## 五、强化训练习题

## 一、填空题

1. 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}$

2. 极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x = \underline{\hspace{2cm}}$

3. 函数  $f(x) = \frac{x}{\sin x}$  的间断点个数为  $\underline{\hspace{2cm}}$

4. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $x - \sin x$  是  $x^2$  的  $\underline{\hspace{2cm}}$  无穷小

5. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} = \underline{\hspace{2cm}}$

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-2x}}{\sin 2x} = \underline{\hspace{2cm}}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x} = \underline{\hspace{2cm}}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{1}{3x} \right)^{2x} = \underline{\hspace{2cm}}$

9. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + ax \cos x}{x} = 2$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$

10.  $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - 2x - 3}$  的间断点为  $\underline{\hspace{2cm}}$

## 二、解答题

1. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$

2. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(1 + x^2)}$

3. 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{2}{x} \right)^{x^2}$

4. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

5. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x}{x^2}$

6. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sqrt{n^2 + 1} - n \right)$

7. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) \ln(1+2x) - \ln(1+3x)}{x^2}$



8. 讨论  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续性
9. 求  $f(x) = \frac{x}{\tan x}$  的所有间断点并分类
10. 证明方程  $x = 2 \sin x + 3$  至少有一个不超过 4 的实根