# 专升本导数与微分基础课程

T-Endless

# 1 导数的概念

## 1.1 导数的定义（零基础通俗版）

### 1.1.1 核心定义

设函数 $y = f(x)$ 在点 $x_0$ 的某邻域内有定义，当自变量 $x$ 在 $x_0$ 处取得增量 $\Delta x$（$x_0 + \Delta x$ 仍在邻域内），相应地函数取得增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$。若极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数 $y = f(x)$ 在点 $x_0$ 处**可导**，该极限值称为函数在 $x_0$ 处的导数，记为

$$f'(x_0), \quad y'|_{x=x_0}, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}, \quad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$$

### 1.1.2 通俗理解

导数本质是「瞬时变化率」，比如汽车行驶的瞬时速度、曲线在某点的陡峭程度，核心是“增量比的极限”，零基础可记住：$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 是“平均变化率”，取极限后就是“瞬时变化率”（导数）。

### 1.1.3 左导数与右导数

导数存在的前提是「左导数 = 右导数」，二者统称为单侧导数：- 左导数（从 $x_0$ 左侧趋近）：

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- 右导数（从 $x_0$ 右侧趋近）：

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

**关键结论**：$f(x)$ 在 $x_0$ 处可导 $\iff$ $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$（专升本常考分段函数可导性判断）。

## 1.2 导数的几何意义

### 1.2.1 核心几何意义

函数 $y = f(x)$ 在点 $x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$，就是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的**切线斜率**。

### 1.2.2 切线与法线方程（专升本必考）

已知曲线 $y = f(x)$ 上一点 $(x_0, y_0)$（其中 $y_0 = f(x_0)$），且 $f'(x_0)$ 存在：1. 切线方程（斜率为 $f'(x_0)$）：

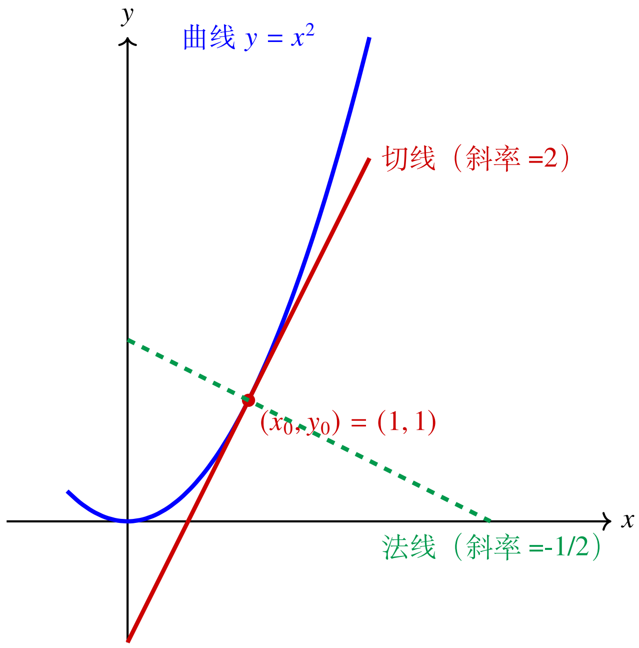
$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

2. 法线方程（与切线垂直，斜率为 $-\frac{1}{f'(x_0)}$，$f'(x_0) \neq 0$）：

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

若 $f'(x_0) = 0$，切线平行于 x 轴，切线方程为 $y = y_0$，法线垂直于 x 轴，法线方程为 $x = x_0$。

#### 1.2.3 几何图形示意




导数的几何意义：切线斜率

### 1.3 可导与连续的关系（核心考点）

#### 1.3.1 核心结论（必记）

1. 若函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处**可导**，则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处**一定连续**（可导 $\Longrightarrow$ 连续）；2. 若函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处**连续**，则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处**不一定可导**（连续 $\not\Rightarrow$ 可导）。

#### 1.3.2 通俗解释

"可导"要求曲线在该点"光滑无尖点"，而"连续"只要求曲线"无断点"。比如 $y = |x|$ 在 $x = 0$ 处连续，但有尖点，左导数 =-1，右导数 =1，左右导数不相等，故不可导。

#### 1.3.3 典型反例（零基础必懂）

函数 $f(x) = |x|$, 在 $x = 0$ 处: - 连续性: $\lim_{x\to0} |x| = 0 = f(0)$, 连续; - 可导性: 左导数 $f'_-(0) = -1$, 右导数 $f'_+(0) = 1$，$f'_-(0) \neq f'_+(0)$，不可导。

## 2 导数的计算（重中之重）

### 2.1 基本导数公式（专升本必考，零基础必背）

**记忆技巧**：常数导数为 0，幂函数"降次减 1"，指数不变乘对数，对数倒数乘对数倒数，三角函数互变符号。

### 2.2 函数四则运算的求导法则

设 $u = u(x)$、$v = v(x)$ 均可导，法则如下（零基础可直接套公式）：

1. 和差法则：$(u \pm v)' = u' \pm v'$（和差的导数 = 导数的和差）

2. 乘积法则：$(u \cdot v)' = u'v + uv'$（乘积的导数 = 前导后不导 + 前不导后导）

3. 商法则：$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$（商的导数 = 分子导乘分母 - 分子乘分母导，分母平方）

| 基本初等函数 | 导数公式 |
| --- | --- |
| 常数函数：$f(x)=C$（$C$ 为常数） | $f'(x)=0$ |
| 幂函数：$f(x)=x^{\mu}$（$\mu$ 为任意实数） | $f'(x)=\mu x^{\mu-1}$ |
| 指数函数：$f(x)=a^{x}$（$a>0,a\neq 1$） | $f'(x)=a^{x}\ln a$ |
| 特殊指数函数：$f(x)=e^{x}$ | $f'(x)=e^{x}$（最常用，记牢） |
| 对数函数：$f(x)=\log_{a}x$（$a>0,a\neq 1$） | $f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$ |
| 特殊对数函数：$f(x)=\ln x$ | $f'(x)=\frac{1}{x}$（最常用，记牢） |
| 正弦函数：$f(x)=\sin x$ | $f'(x)=\cos x$ |
| 余弦函数：$f(x)=\cos x$ | $f'(x)=-\sin x$ |
| 正切函数：$f(x)=\tan x$ | $f'(x)=\sec^{2}x$ |
| 反正切函数：$f(x)=\arctan x$ | $f'(x)=\frac{1}{1+x^{2}}$ |

**特殊情况**：若 $v=C$（常数），则 $(Cu)'=Cu'$（常数乘函数的导数 = 常数乘函数的导数）。

## 2.3 复合函数的求导法则（链式法则）

### 2.3.1 核心法则

设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的导数为：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\quad \text{或}\quad y'_x=y'_u\cdot u'_x$$

### 2.3.2 通俗步骤（零基础必会）

1. 拆分复合函数：找到“内层函数” $u=\varphi(x)$ 和“外层函数” $y=f(u)$；2. 分别求导：求外层函数对 $u$ 的导数 $y'_u$，求内层函数对 $x$ 的导数 $u'_x$；3. 相乘：将两个导数相乘，最后把 $u$ 换回 $\varphi(x)$。

### 2.3.3 易错提醒

复合函数求导“不能漏层”，比如 $y=\sin(x^2)$，内层 $u=x^2$，外层 $y=\sin u$，导数是 $y'=\cos u\cdot 2x=2x\cos(x^2)$，不能直接写成 $\cos(x^2)$。

## 2.4 分段函数的导数

### 2.4.1 求导原则

1. 分段区间内：按基本公式、四则法则、链式法则求导；2. 分段点处：必须用「左导数、右导数」判断可导性，若可导，导数即为左（右）导数的值。

### 2.4.2 典型例题（专升本高频）

**题目**：设分段函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 1\\ 2x-1, & x>1\end{cases}$，判断 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否可导，若可导，求 $f'(1)$。

**解**：第一步：先判断连续性（可导必先连续）$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}x^2=1$，$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(2x-1)=1$，且 $f(1)=1^2=1$，故连续。

第二步：求左、右导数 - 左导数：$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^-}(2+\Delta x)=2$ - 右导数：$f'_+(1)=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{2(1+\Delta x)-1-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}2=2$

第三步：判断可导性因 $f'_-(1)=f'_+(1)=2$，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=2$。

### 2.5 隐函数的导数

#### 2.5.1 定义

由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的函数（无法直接解出 $y = f(x)$），如 $x^2 + y^2 = 1$、$e^y + xy = 0$，称为隐函数。

#### 2.5.2 求导方法（零基础通用）

1. 方程两边同时对 $x$ 求导；2. 求导过程中，遇到 $y$ 的函数（如 $y^2$、$e^y$），按复合函数求导，先对 $y$ 求导，再乘 $y'$；3. 把含 $y'$ 的项移到等式左边，其余项移到右边，解出 $y'$（结果中可含 $y$）。

#### 2.5.3 典型例题（简单易上手）

**题目**：求隐函数 $x^2 + y^2 = 1$ 的导数 $y'$。

**解**：1. 两边对 $x$ 求导：$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(1)$ 2. 分别求导：$2x + 2y \cdot y' = 0$（$y^2$ 是复合函数，对 $x$ 求导为 $2y \cdot y'$）3. 解出 $y'$：$2y \cdot y' = -2x \implies y' = -\frac{x}{y}$（结果含 $y$，符合隐函数导数特点）

## 3 高阶导数

### 3.1 高阶导数的概念

#### 3.1.1 定义

函数 $y = f(x)$ 的导数 $y' = f'(x)$ 仍是 $x$ 的函数，若 $f'(x)$ 仍可导，则称其导数为 $f(x)$ 的**二阶导数**，记为

$$f''(x), \quad y'', \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2}$$

同理，二阶导数的导数称为三阶导数，以此类推，二阶及以上的导数统称为高阶导数。

#### 3.1.2 通俗理解

一阶导数是“瞬时变化率”，二阶导数是“变化率的变化率”（比如加速度，是速度的导数，即位移的二阶导数），零基础无需深究其物理意义，重点会计算即可。

### 3.2 简单函数的高阶导数（专升本常考）

#### 3.2.1 常见函数的高阶导数（必记）

1. 常数函数：$f(x) = C$，$f'(x) = 0$，$f''(x) = 0$，$\dots$，$f^{(n)}(x) = 0$（n≥1）；
2. 幂函数：$f(x) = x^n$（n 为正整数），$f^{(n)}(x) = n!$（n 阶导数为阶乘），$f^{(k)}(x) = 0$（k>n）；
3. 指数函数：$f(x) = e^x$，$f^{(n)}(x) = e^x$（任意阶导数都等于自身，超好记）；
4. 正弦、余弦函数：$f(x) = \sin x$，$f''(x) = -\sin x$，$f^{(4)}(x) = \sin x$（周期为 4）。

#### 3.2.2 典型例题（直接套规律）

**题目**：求 $f(x) = e^x + x^3$ 的二阶导数 $f''(x)$。

**解**：1. 一阶导数：$f'(x) = (e^x)' + (x^3)' = e^x + 3x^2$ 2. 二阶导数：$f''(x) = (e^x)' + (3x^2)' = e^x + 6x$

# 4 微分

## 4.1 微分的概念

### 4.1.1 核心定义

设函数 $y = f(x)$ 在点 $x$ 处可导，则称 $f'(x)dx$ 为函数 $y = f(x)$ 在点 $x$ 处的**微分**，记为 $dy$，即

$$dy = f'(x)dx$$

其中 $dx$ 称为自变量 $x$ 的微分，且 $dx = \Delta x$（零基础可理解为“微小的增量”）。

### 4.1.2 通俗理解

微分是“函数增量的近似值”，当 $\Delta x$ 很小时，$\Delta y \approx dy = f'(x)dx$，比如用切线的增量近似代替曲线的增量，简化计算。

## 4.2 可微与可导的关系（核心结论）

**必记结论**：函数 $y = f(x)$ 在点 $x$ 处**可微** $\iff$ 函数 $y = f(x)$ 在点 $x$ 处**可导**，且可微时，必有 $dy = f'(x)dx$。

### 4.2.1 易错区分

- 导数 $f'(x) = \frac{dy}{dx}$：是“比值”，反映函数的瞬时变化率；- 微分 $dy = f'(x)dx$：是“增量的近似值”，是一个具体的量（与 $dx$ 有关）。

## 4.3 微分公式与微分法则

### 4.3.1 基本初等函数的微分公式（与导数公式对应）

由 $dy = f'(x)dx$，直接由导数公式推导，零基础可结合导数公式记忆：

| 基本初等函数 | 微分公式 |
|---|---|
| $y = C$（常数） | $dy = 0$ |
| $y = x^\mu$ | $dy = \mu x^{\mu-1}dx$ |
| $y = a^x$ | $dy = a^x \ln a \cdot dx$ |
| $y = e^x$ | $dy = e^x dx$ |
| $y = \ln x$ | $dy = \frac{1}{x}dx$ |
| $y = \sin x$ | $dy = \cos x dx$ |
| $y = \cos x$ | $dy = -\sin x dx$ |

### 4.3.2 函数四则运算的微分法则

设 $u = u(x)$、$v = v(x)$ 均可微，法则与导数法则对应：

1. 和差微分：$d(u \pm v) = du \pm dv$
2. 乘积微分：$d(uv) = vdu + udv$
3. 商微分：$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu-udv}{v^2}$（$v \neq 0$）
4. 常数微分：$d(Cu) = Cdu$（$C$ 为常数）

### 4.3.3 复合函数的微分法则（微分形式不变性）

设 $y = f(u)$，$u = \varphi(x)$，则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的微分为：

$$dy = f'(u)du$$

无论 $u$ 是自变量还是中间变量，微分形式都不变，这就是**微分形式不变性**（零基础可直接套公式，无需拆分复合关系）。

### 4.3.4 典型例题（微分计算）

**题目**：求函数 $y = \sin(2x+1)$ 的微分 $dy$。

**解法 1（用复合函数导数）**：1. 求导数：$y' = \cos(2x+1)\cdot 2 = 2\cos(2x+1)$ 2. 微分：$dy = y'dx = 2\cos(2x+1)dx$

**解法 2（用微分形式不变性）**：设 $u = 2x+1$，则 $y = \sin u$，$dy = \cos u \cdot du$，又 $du = 2dx$，代入得 $dy = \cos(2x+1)\cdot 2dx = 2\cos(2x+1)dx$（两种方法结果一致）。

# 5 典型例题汇总

## 5.1 导数计算例题

### 5.1.1 例题 1：四则运算求导

**题目**：求 $y = x^3 + 2e^x - \frac{1}{x}$ 的导数 $y'$。

**解**：

$$y' = (x^3)' + (2e^x)' - \left(\frac{1}{x}\right)' = 3x^2 + 2e^x - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 3x^2 + 2e^x + \frac{1}{x^2}$$

### 5.1.2 例题 2：复合函数求导

**题目**：求 $y = \ln(x^2+1)$ 的导数 $y'$。

**解**：设 $u = x^2+1$，则 $y = \ln u$，

$$y' = \frac{1}{u}\cdot u' = \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$$

### 5.1.3 例题 3：隐函数求导

**题目**：求 $e^y + xy = 1$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程。

**解**：1. 求隐函数导数：两边对 $x$ 求导，$e^y \cdot y' + (y + xy') = 0$

2. 解出 $y'$：$y'(e^y + x) = -y \implies y' = -\frac{y}{e^y+x}$

3. 代入点 $(0,0)$：$y'|_{(0,0)} = -\frac{0}{e^0+0} = 0$

4. 切线方程：$y - 0 = 0\cdot(x-0) \implies y = 0$

## 5.2 微分计算例题

**题目**：求 $y = x^2\cos x$ 的微分 $dy$。

**解**：用乘积微分法则，$d(uv) = vdu + udv$，设 $u = x^2$，$v = \cos x$，则 $du = 2xdx$，$dv = -\sin x dx$，

$$dy = \cos x \cdot 2xdx + x^2\cdot(-\sin x)dx = (2x\cos x - x^2\sin x)dx$$

# 6 章节总结 & 考试重点

## 6.1 安徽专升本导数与微分高频考点

1. **导数概念**：左导数、右导数的计算，可导与连续的关系（选择/填空必考）；
2. **几何意义**：切线方程、法线方程的求解（解答题高频）；
3. **导数计算**：基本公式、四则法则、复合函数链式法则（重中之重，贯穿所有题型）；
4. **特殊函数求导**：分段函数、隐函数的导数（解答题必考 1 道）；
5. **高阶导数**：简单函数（$e^x$、$x^n$、$\sin x$）的二阶导数计算；
6. **微分**：可微与可导的关系，微分公式与计算（选择/填空常考）。

## 6.2 核心公式速记表

| 类型 | 核心公式/结论 |
|---|---|
| 导数定义 | $f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ |
| 左/右导数 | $f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$，$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ |
| 切线/法线 | 切线：$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$；法线：$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ |
| 可导与连续 | 可导 $\Longrightarrow$ 连续，连续 $\not\Rightarrow$ 可导 |
| 复合函数求导 | $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$（链式法则） |
| 隐函数求导 | 两边对 $x$ 求导，解出 $y'$ |
| 高阶导数 | $f''(x) = (f'(x))'$，$e^x$ 任意阶导数为自身 |
| 微分 | $dy = f'(x)dx$，可微 $\Longleftrightarrow$ 可导 |
| 微分形式不变性 | $dy = f'(u)du$（$u$ 为自变量或中间变量） |