

# 高等数学（函数、极限与连续）50 题

库课数学 2000 题精选

## 一、单项选择题（20 题）

1. 已知集合  $A = \{x \mid x^2 - 2x > 0\}$ , 集合  $B = \{x \mid x^2 - 9 < 0\}$ , 则下列结论正确的是 ( )
  - A.  $A \cap B = \emptyset$
  - B.  $A \cup B = \mathbb{R}$
  - C.  $A \subseteq B$
  - D.  $B \subseteq A$
2. 设  $a, b, c$  均为不等于 1 的正实数, 则下列对数等式恒成立的是 ( )
  - A.  $\log_a b \cdot \log_c b = \log_c a$
  - B.  $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$
  - C.  $\log_a(bc) = \log_a b \cdot \log_a c$
  - D.  $\log_a(b+c) = \log_a b + \log_a c$
3. 函数  $y = \arccos \frac{2x-1}{3} + (x-1)^{-1}$  的定义域是 ( )
  - A.  $[-1, 1) \cup (1, 2]$
  - B.  $(-1, 1) \cup (1, 2)$
  - C.  $[-1, 2]$
  - D.  $(-1, 2)$
4. 下列各组函数中,  $f(x)$  与  $g(x)$  为同一函数的是 ( )
  - A.  $f(x) = \ln x^2, g(x) = 2 \ln x$
  - B.  $f(x) = \tan x, g(x) = \sqrt{\sec^2 x - 1}$
  - C.  $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x), g(x) = -\ln(\sqrt{x^2+1} + x)$
  - D.  $f(x) = 1, g(x) = \frac{x}{x}$

5. 已知  $f\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{3x + 1}{2x - 1}$ , 则  $f(x) = ( \quad )$
- A.  $\frac{4 - x}{1 + x}$   
B.  $\frac{4 + x}{1 - x}$   
C.  $\frac{1 - x}{4 + x}$   
D.  $\frac{3x + 1}{2x - 1}$
6. 函数  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$  是 ( )
- A. 奇函数  
B. 偶函数  
C. 非奇非偶函数  
D. 周期函数
7. 设  $g(x)$  为奇函数,  $h(x)$  为偶函数, 二者均为  $\mathbb{R}$  上非零函数, 则下列结论一定成立的是 ( )
- A.  $f[g(x)]$  必为奇函数  
B.  $g[f(x)]$  必为奇函数  
C.  $f[h(x)]$  必为偶函数  
D.  $h[f(x)]$  必为偶函数
8. 函数  $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$  的最小正周期是 ( )
- A.  $2\pi$   
B.  $\pi$   
C.  $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$   
D.  $\frac{\pi}{6}$
9. 设函数  $f(x) = 1 + 3^x$  的反函数为  $g(x)$ , 则  $g(10) = ( \quad )$
- A. -2  
B. -1  
C. 2  
D. 3
10. 曲线  $y = e^{2x}$  与  $y = \frac{1}{2} \ln x$  的对称关系为 ( )

- A. 关于  $x$  轴对称  
B. 关于  $y$  轴对称  
C. 关于直线  $y = x$  对称  
D. 关于原点对称
11. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{6n} = ( \quad )$   
A.  $k$   
B.  $6k$   
C.  $0$   
D. 不存在
12. 下列关于数列与函数极限的命题, 正确的是 (  $\quad$  )  
A. 数列有界, 则数列必收敛  
B. 数列收敛, 则数列必有界  
C. 函数在一点极限存在, 则极限不唯一  
D. 函数左右极限都存在, 则极限必存在
13. 设对任意  $x$ , 总有  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - h(x)] = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  (  $\quad$  )  
A. 存在且为  $0$   
B. 存在但不一定为  $0$   
C. 一定不存在  
D. 不一定存在
14. 当  $x \rightarrow a$  时, 若  $f(x)$  为有界函数, 则必有  $\lim_{x \rightarrow a} (x - a)f(x) = ( \quad )$   
A.  $0$   
B.  $1$   
C.  $\infty$   
D. 不存在
15.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} + x) = ( \quad )$   
A.  $0$   
B.  $-2$   
C.  $2$

- D. 4
16. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{ax} = 3$ , 则常数  $a = ( \quad )$
- A.  $\frac{2}{3}$
- B.  $\frac{3}{2}$
- C. 2
- D. 不确定
17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$  的结果为  $( \quad )$
- A. 0
- B. 1
- C.  $\infty$
- D. 不存在且不为无穷大
18. 当  $x \rightarrow 3$  时, 判断  $x^2 - 9$  与  $x - 3$  的无穷小关系  $( \quad )$
- A. 等价无穷小
- B. 同阶非等价无穷小
- C. 高阶无穷小
- D. 低阶无穷小
19. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$  是  $x \sin x^n$  的高阶无穷小,  $x \sin x^n$  是  $e^{x^2} - 1$  的高阶无穷小, 则正整数  $n = ( \quad )$
- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4
20. 函数  $f(x)$  在  $x_0$  处有定义是  $f(x)$  在  $x_0$  处连续的  $( \quad )$
- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既非充分也非必要条件

## 二、 填空题 (15 题)

1. 函数  $f(x) = \sqrt{1 - 3^x}$  的定义域为\_\_\_\_\_。
2. 设函数  $y = f(x^3)$  的定义域为  $[1, 2]$ , 则  $f(x)$  的定义域为\_\_\_\_\_。
3. 已知  $f(x) = \frac{x}{1-x}$ , 则  $f\left[\frac{1}{f(x)}\right] =$ \_\_\_\_\_。
4. 已知  $f(x+5) = x^2 + 5x$ , 则  $f(x) =$ \_\_\_\_\_。
5. 函数  $f(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$  是\_\_\_\_\_ 函数, 图形关于\_\_\_\_\_ 对称。
6. 若  $f(x) = \lg(x + \sqrt{x^2 + 2a})$  为奇函数, 则  $a =$ \_\_\_\_\_。
7. 函数  $f(x) = 5 \cot(3x + 2)$  的周期为\_\_\_\_\_。
8. 数列  $6, \frac{1}{2}, 6, \frac{1}{4}, 6, \frac{1}{6}, \dots, 6, \frac{1}{2n}, \dots$  是\_\_\_\_\_ (收敛/发散) 数列。
9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+5x} - \sqrt{1-3x}}{x^2 + 2x} =$ \_\_\_\_\_。
10.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin 2x)^{\frac{1}{x}} =$ \_\_\_\_\_。
11.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} =$ \_\_\_\_\_,  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} =$ \_\_\_\_\_。
12. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin x} - 1}{x \ln(1+2x)} = 2$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin x} =$ \_\_\_\_\_。
13. 当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $\sqrt{x + \sqrt{x}}$  是  $x$  的\_\_\_\_\_ (高/低/同) 阶无穷小。
14. 若  $x \rightarrow 0$  时,  $3x^2$  与  $\sin \frac{kx^2}{2}$  为等价无穷小, 则  $k =$ \_\_\_\_\_。
15. 函数  $y = e^{\frac{1}{x}}$  的间断点为  $x =$ \_\_\_\_\_, 属于第\_\_\_\_\_ 类间断点。

## 三、 计算与证明题 (15 题)

1. 求函数  $y = \sqrt{\arcsin(3x+4)}$  的定义域。
2. 已知  $f(x)$  定义域为  $[0, 1]$ , 求复合函数  $f(x+a) + f(x-a)$  ( $a > 0$ ) 的定义域。
3. 设  $f(x) = \frac{x}{1-x}$ ,  $g(x) = \frac{x}{1+x}$ , 求复合函数  $f[g(x)]$  与  $g[f(x)]$ 。
4. 已知  $f(\ln x) = x^2(1 + \ln x)$ , 求函数  $f(x)$  的显式表达式。
5. 设  $f(x) = e^{x^2}$ ,  $f[g(x)] = 1 - x$  且  $g(x) \geq 0$ , 求  $g(x)$  及其定义域。
6. 设函数  $f(x)$  满足  $2f(x) + f(-x) = -x$ , 求  $f(x)$ 。

7. 求函数  $y = 2 + \ln(2x + 1)$  的反函数。
8. 已知等腰三角形周长为 20, 腰长为  $x$ , 底边长为  $y$ , 写出  $y$  关于  $x$  的函数关系式, 并求定义域。
9. 计算极限:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 8} + x)$ 。
10. 计算极限:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$ 。
11. 计算极限:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)}{\sqrt{1 + x^3} - 1}$ 。
12. 计算极限:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+n} \right)$ 。
13. 已知  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax + b \right) = 3$ , 求常数  $a, b$ 。
14. 求函数  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x|(x^2 - 3x + 2)}$  的间断点, 并判断间断点类型。
15. 证明: 方程  $x^5 + 3x^3 - 3 = 0$  在区间  $(0, 1)$  内至少存在一个实根。

## 四、答案与详细解析

### 4.1 单项选择题 (20 题)

1. **答案: B** 解:  $A: x^2 - 2x > 0 \Rightarrow x(x - 2) > 0 \Rightarrow x < 0$  或  $x > 2$ ;  $B: x^2 - 9 < 0 \Rightarrow -3 < x < 3$ .  $A \cup B = \mathbb{R}$ , 故选 B.

2. **答案: B** 解: 换底公式  $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$

$$\log_a b \cdot \log_c a = \frac{\ln b}{\ln a} \cdot \frac{\ln a}{\ln c} = \frac{\ln b}{\ln c} = \log_c b$$

对数四则运算法则可知 C、D 错误, 故选 B.

3. **答案: A** 解: 定义域满足

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{2x-1}{3} \leq 1 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \leq 2x-1 \leq 3 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

即  $[-1, 1) \cup (1, 2]$ , 选 A.

4. **答案: C** 解: 同一函数要求定义域 + 对应法则完全相同. A: 定义域不同; B: 定义域不同; C: 定义域均为  $\mathbb{R}$ , 化简后表达式等价; D: 定义域不同. 故选 C.

5. **答案: A** 解: 令  $t = \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{t+1}$ , 代入:

$$f(t) = \frac{3 \cdot \frac{1}{t+1} + 1}{2 \cdot \frac{1}{t+1} - 1} = \frac{4+t}{1-t-1} = \frac{4-t}{t+1}$$

替换变量得  $f(x) = \frac{4-x}{1+x}$ , 选 A.

6. **答案: A** 解: 定义域  $\mathbb{R}$ ,

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -f(x)$$

为奇函数, 选 A.

7. **答案: C** 解:  $h(x)$  为偶函数  $\Rightarrow h(-x) = h(x)$

$$f[h(-x)] = f[h(x)]$$

C 故  $f[h(x)]$  必为偶函数, 选 C.

8. **答案: A** 解: 辅助角公式

$$y = \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right)$$

最小正周期  $T = 2\pi$ , 选 A.

9. **答案: C** 解:  $f(x) = 1 + 3^x$ , 令  $1 + 3^x = 10 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2$ , 反函数满足  $g(10) = 2$ , 选 C。
10. **答案: C** 解: 互为反函数的两条曲线关于直线  $y = x$  对称。  $y = e^{2x}$  反函数:  $x = e^{2y} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \ln x$ , 选 C。
11. **答案: A** 解: 收敛数列的子列收敛到同一极限, 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{6n} = k$ , 选 A。
12. **答案: B** 解: 收敛数列必有界; 有界数列不一定收敛; 函数极限存在则唯一; 左右极限存在但不等时极限不存在。选 B。
13. **答案: D** 解: 夹逼准则要求  $\lim g(x) = \lim h(x)$ , 本题仅  $\lim(g - h) = 0$ , 无法保证极限存在, 选 D。
14. **答案: A** 解: 有界函数乘无穷小仍为无穷小,  $x \rightarrow a$  时  $x - a \rightarrow 0$ , 故极限为 0, 选 A。
15. **答案: B** 解: 分子有理化,  $x \rightarrow -\infty$  时  $\sqrt{x^2} = -x$
- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 4x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{-\sqrt{1 + \frac{4}{x}} - 1} = -2$$
- 选 B。
16. **答案: A** 解: 等价无穷小  $\sin 2x \sim 2x$  ( $x \rightarrow 0$ )
- $$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{ax} = \frac{2}{a} = 3 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$
- 选 A。
17. **答案: D** 解:  $x \rightarrow 0$  时  $\sin \frac{1}{x}$  在  $[-1, 1]$  振荡,  $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$  振荡无定值, 极限不存在且非无穷大, 选 D。
18. **答案: B** 解:
- $$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6$$
- 极限为非零常数, 二者同阶非等价无穷小, 选 B。
19. **答案: C** 解: 等价无穷小:  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ ,  $\ln(1+x^2) \sim x^2$ ,  $e^{x^2} - 1 \sim x^2$ ,  $\sin x^k \sim x^k$   
 $(1 - \cos x) \ln(1+x^2)$  是 4 阶无穷小;  $e^{x^2} - 1$  是 2 阶无穷小; 要求:  $2 < n + 1 < 4 \Rightarrow n = 3$ , 选 C。
20. **答案: B** 解: 连续  $\Rightarrow$  必有定义; 有定义不一定连续。有定义是连续的必要不充分条件, 选 B。

## 4.2 填空题 (15 题)

1. **答案:**  $(-\infty, 0]$  **解:**  $1 - 3^x \geq 0 \Rightarrow 3^x \leq 1 \Rightarrow x \leq 0$ 。
2. **答案:**  $[1, 8]$  **解:**  $y = f(x^3)$  定义域  $x \in [1, 2] \Rightarrow x^3 \in [1, 8]$ , 故  $f(x)$  定义域  $[1, 8]$ 。
3. **答案:**  $\frac{1-x}{2x-1}$  **解:**  $\frac{1}{f(x)} = \frac{1-x}{x}$ , 代入计算可得结果。
4. **答案:**  $x^2 - 5x$  **解:** 令  $t = x + 5 \Rightarrow x = t - 5$ , 代入化简得  $f(t) = t^2 - 5t$ 。
5. **答案:** 奇; **原点解:** 验证  $f(-x) = -f(x)$ , 奇函数图像关于原点对称。
6. **答案:**  $\frac{1}{2}$  **解:** 奇函数满足  $f(0) = 0$ , 代入解得  $a = -\frac{1}{2}$ 。
7. **答案:**  $\frac{\pi}{3}$  **解:**  $\cot(\omega x + \varphi)$  周期  $T = \frac{\pi}{|\omega|}$ , 此处  $\omega = 3$ 。
8. **答案:** 发散 **解:** 数列奇数项恒为 6, 偶数项趋于 0, 左右子列极限不同, 发散。
9. **答案:** 2 **解:** 分子有理化后利用等价无穷小计算, 结果为 4。
10. **答案:**  $e^{-2}$  **解:** 重要极限变形:  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e$ , 求得结果  $e^{-2}$ 。
11. **答案:** 1; 0 **解:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ ; 有界量乘无穷小仍为无穷小, 故  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ 。
12. **答案:** 8 **解:** 等价无穷小  $\sqrt{1+u} - 1 \sim \frac{1}{2}u$ ,  $\ln(1+2x) \sim 2x$ , 代入极限等式解得结果为 8。
13. **答案:** 低 **解:** 阶数比较可知  $\sqrt{x+\sqrt{x}}$  是  $x$  的低阶无穷小。
14. **答案:** 6 **解:** 等价无穷小  $\sin \frac{kx^2}{2} \sim \frac{kx^2}{2}$ , 令  $\frac{k}{2} = 3 \Rightarrow k = 6$ 。
15. **答案:** 0; 二 **解:**  $x = 0$  处左右极限一个为  $+\infty$ 、一个为 0, 第二类间断点。

## 4.3 计算与证明题 (15 题)

1. **解:**

$$\begin{cases} \arcsin(3x+4) \geq 0 \\ -1 \leq 3x+4 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+4 \geq 0 \\ -1 \leq 3x+4 \leq 1 \end{cases}$$

解得  $-\frac{4}{3} \leq x \leq -1$ 。

2. **解:**

$$\begin{cases} 0 \leq x+a \leq 1 \\ 0 \leq x-a \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a \leq x \leq 1-a \\ a \leq x \leq 1+a \end{cases}$$

结合  $a > 0$  分类讨论: 当  $0 < a \leq \frac{1}{2}$ , 定义域  $[a, 1-a]$ ; 当  $a > \frac{1}{2}$ , 定义域为空集。

3. 解:

$$f[g(x)] = f\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{\frac{x}{1+x}}{1 - \frac{x}{1+x}} = x$$

$$g[f(x)] = g\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{\frac{x}{1-x}}{1 + \frac{x}{1-x}} = x$$

4. 解: 令  $t = \ln x \Rightarrow x = e^t$

$$f(t) = (e^t)^2(1+t) = e^{2t}(1+t)$$

即  $f(x) = e^{2x}(1+x)$ 。

5. 解:

$$f[g(x)] = e^{g^2(x)} = 1-x \Rightarrow g^2(x) = \ln(1-x)$$

由  $g(x) \geq 0$ , 得  $g(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$ 。定义域:  $\ln(1-x) \geq 0 \Rightarrow 1-x \geq 1 \Rightarrow x \leq 0$ 。

6. 解:

$$\begin{cases} 2f(x) + f(-x) = -x \\ 2f(-x) + f(x) = x \end{cases}$$

联立解得:  $f(x) = -x$ 。

7. 解:

$$y = 2 + \ln(2x+1) \Rightarrow y-2 = \ln(2x+1) \Rightarrow e^{y-2} = 2x+1$$

反函数:  $y = \frac{e^{x-2} - 1}{2}$ 。

8. 解: 周长  $2x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - 2x$ 。三角形三边约束:

$$\begin{cases} x+x > 20-2x \\ x > 0, 20-2x > 0 \end{cases} \Rightarrow 5 < x < 10$$

关系式:  $y = 20 - 2x, x \in (5, 10)$ 。

9. 解: 分子有理化,  $x \rightarrow -\infty$  时  $\sqrt{x^2} = -x$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 8} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 8}{\sqrt{x^2 + 4x + 8} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + \frac{8}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}} - 1} = -2 \end{aligned}$$

10. 解：分子因式分解，分母有理化

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)(\sqrt{x} + \sqrt{2}) = 8\sqrt{2}\end{aligned}$$

11. 解：等价无穷小： $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ ,  $\sqrt{1+x^3} - 1 \sim \frac{1}{2}x^3$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^3} = 1$$

12. 解：利用  $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ ，则

$$\frac{1}{1+2+\cdots+k} = \frac{2}{k(k+1)} = 2 \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

裂项相消求和，取极限得结果为 2。

13. 解：通分整理多项式，比较最高次项系数：

$$\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax + b = \frac{(1-a)x^2 + (b-a)x + (1+b)}{x+1}$$

由极限存在且为 3，得  $1 - a = 0$ ,  $b - a = 3 \Rightarrow a = 1$ ,  $b = 4$ 。

14. 解：间断点： $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ 。

-  $x = 0$ ：无穷间断点（第二类）；

-  $x = 1$ ：可去间断点（第一类）；

-  $x = 2$ ：无穷间断点（第二类）。

15. 证明：令  $f(x) = x^5 + 3x^3 - 3$ ,  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续。 $f(0) = -3 < 0$ ,  $f(1) = 1 + 3 - 3 = 1 > 0$ 。由零点存在定理， $\exists \xi \in (0, 1)$ ，使得  $f(\xi) = 0$ 。即方程在  $(0, 1)$  内至少有一个实根。