高等数学（导数与微分）精选 50 题

库课数学 2000 题精选

一、　单项选择题（30 题）

1. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，则下列极限存在且为零的是（　）

   A. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f[\ln(1-h)]$

   B. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f\left(\sqrt{1+h^2}-1\right)$

   C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(\tan h-\sin h)$

   D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$

2. 设 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则（　）

   A. $f'(x_0)$ 必存在

   B. $f'(x_0)$ 必不存在

   C. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 必存在

   D. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 必不存在

3. 下面说法中正确的是（　）

   A. 函数在 x_0 处可导，则在 x_0 处必连续

   B. 函数在 x_0 处不可导，则在 x_0 处必不存在切线

   C. 函数在 x_0 处不可导，则在 x_0 处必不连续

   D. 函数在 x_0 处不可导，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 必不存在

4. 设 $y=f(x^2+a)$，其中 f 二阶可导，a 为常数，则 $y''=$（　）

   A. $2f'\left(x^2+a\right)+4x^2f''\left(x^2+a\right)$

   B. $2xf'\left(x^2+a\right)$

   C. $2f\left(x^2+a\right)+4x^2f'\left(x^2+a\right)$

   D. $4xf''\left(x^2+a\right)$

5. 设 $y=f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$，则 $f(1)=$（　）

A. 2

B. 1

C. $\dfrac{1}{2}$

D. 0

6. 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某个邻域内有定义，则 "$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 存在且等于 A" 是 "$f'(x_0)$ 存在且等于 A" 的（　）

A. 充分而非必要条件

B. 必要而非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分又非必要条件

7. 设函数 $f(x)=|x^3-1|\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在点 $x=1$ 处连续，则 $\varphi(1)=0$ 是 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导的（　）

A. 充分必要条件

B. 充分但非必要条件

C. 必要但非充分条件

D. 既非充分又非必要条件

8. 下列函数中，在点 $x=0$ 处可导的是（　）

A. $y=|x|$

B. $y=\sqrt{x}$

C. $y=x$

D. $y=\ln x$

9. 设 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，则函数在 $x=0$ 处（　）

A. 可导

B. 连续但不可导

C. 极限不存在

D. 极限存在但不连续

10. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0 \\ x^2g(x), & x\leq 0 \end{cases}$，$g(x)$ 为有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　）

A. 极限不存在

B. 极限存在但不连续

C. 连续但不可导

D. 可导

11. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x<0 \\ ax+b, & x\geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则（　）

A. $a=1$，$b=0$

B. $a=0$，b 为任意常数

C. $a=0$，$b=0$

D. $a=1$，b 为任意常数

12. 设 $f(x)=|\sin x|$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处（　）

A. 可导

B. 连续但不可导

C. 不连续

D. 无意义

13. 设 $F(x)=\begin{cases} \dfrac{(x+\sin x)f(x)}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f(0)=0$，则 $F(x)$ 在 $x=0$ 处（　）

A. 不连续

B. 连续但不可导

C. 可导且 $F'(0)=0$

D. 可且 $F'(0)=2f'(0)$

14. 设 $f(x)$ 可导，且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-2x)}{x}=-2$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为（　）

A. 4

B. -4

C. 1

D. -1

15. 设 $f(x)=e^2+\sqrt{x}$，则 $f'(x)=$（　）

A. $e^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

B. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

C. $\frac{2}{\sqrt{x}}$

D. $\frac{1}{\sqrt{x}}$

16. 设函数 $f(x) = e^{-x^2}$，则 $f'(x) = $（　）

A. $-2e^{-x^2}$

B. $2e^{-x^2}$

C. $-2xe^{-x^2}$

D. $2xe^{-x^2}$

17. 设函数 $f(x) = x\sin x$，则 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = $（　）

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. $\frac{\pi}{2}$

D. 2π

18. 若 $f(x-1) = x^2 - 1$，则 $f'(x) = $（　）

A. $2x+2$

B. $x(x+1)$

C. $x(x-1)$

D. $2x-1$

19. 设 $f(\sin^2 x) = \cos^2 x$，则 $f'(x) = $（　）

A. -1

B. 1

C. 0

D. 2

20. 设 $f(e^x) = \frac{1}{1+x^2}$，则 $f'(x) = $（　）

A. $-\frac{2\ln x}{x\left(1+\ln^2 x\right)^2}$

B. $\dfrac{2\ln x}{\left(1+\ln^2 x\right)^2}$

C. $-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

D. $-\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$

21. 函数 $y=f(x)$ 可导，则 $y=f\{f[f(x)]\}$ 的导数为（　）

A. $f'\{[f(x)]\}$

B. $f'\{f'[f'(x)]\}$

C. $f'(f[f(x)])f'(x)$

D. $f'\{f[f(x)]\}f'[f(x)]f'(x)$

22. 设函数 $g(x)$ 可微，$h(x)=e^{1+g(x)}$，$h'(1)=1$，$g'(1)=2$，则 $g(1)=$（　）

A. $\ln 3-1$

B. $-\ln 3-1$

C. $-\ln 2-1$

D. $\ln 2-1$

23. 设 $y=4x-\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$，其反函数 $x=\varphi(y)$ 在 $y=0$ 处的导数是（　）

A. $\dfrac{1}{8}$

B. 8

C. $\dfrac{1}{2}$

D. $\dfrac{1}{4}$

24. 曲线 $y=x\ln x-x$ 在 $x=e$ 处的切线方程是（　）

A. $y=e-x$

B. $y=x-e$

C. $y=x+e$

D. $y=-x-e$

25. 曲线 $f(x)=x^3+ax$ 和 $g(x)=bx^2+c$ 都过点 $(-1,0)$，且在该点有公共切线，则 a,b,c 依次为（　）

A. $-1,-1,1$

B. $1,-1,1$

C. $1, 1, -1$

D. $1, -1, -1$

26. 曲线 $y = x^2 + x - 2$ 在点 M 处的切线斜率为 3，则点 M 的坐标为（　）

A. $(0, -2)$

B. $(1, 0)$

C. $(0, 0)$

D. $(-1, -2)$

27. 设 $y = 2^x$，则 $y^{(n)} =$（　）

A. 2^x

B. $2^x \ln 2$

C. $(\ln 2)^n 2^x$

D. $2 \ln x$

28. 已知函数 $y = y(x)$ 由方程 $y^2 - 2xy + 9 = 0$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx} =$（　）

A. $\dfrac{y}{x-y}$

B. $\dfrac{x}{x-y}$

C. $\dfrac{x}{y-x}$

D. $\dfrac{y}{y-x}$

29. 已知 $y = x^{\frac{1}{x}}$，则 $y' =$（　）

A. $\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

B. $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$

C. $x^{\frac{1}{x}-1}(1-\ln x)$

D. $x^{\frac{1}{x}-2}(\ln x - 1)$

30. 若函数 $f'(x_0) = \dfrac{1}{2}$，则当 $\Delta x \to 0$ 时，函数在 x_0 处的微分 dy 是 Δx 的（　）

A. 等价无穷小

B. 同阶无穷小

C. 低阶无穷小

D. 高阶无穷小

二、 填空题（10 题）

1. 设函数 $f(x)=\log_2 x$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$________。

2. 设 $f'(x_0)$ 存在,且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+k\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{1}{3}f'(x_0)\ (f'(x_0)\neq 0)$,则 $k=$________。

3. 已知 $f(x)=x|x|$，则 $f'(0)=$________。

4. 设 $f(x)=\begin{cases}a+xe^x, & x\geq 0\\ bx, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则 $a=$________，$b=$________。

5. 已知 $y=\ln\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)$，则 $y'=$________。

6. 设 $y=\arctan e^{\sqrt{x}}$，则 $y'=$________。

7. 已知 $y^{(n-2)}=f(\ln x)$，其中 f 任意阶可导，则 $y^{(n)}=$________。

8. 曲线 $y=x+\cos x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线斜率 $k=$________。

9. 设 $y=(3x+1)^{27}$，则 $y^{(27)}=$________。

10. 设 $\tan y=x+y$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$________。

三、 计算与证明题（10 题）

1. 设 $f(x)$ 在 x_0 点处可导，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+x^2)-f(x_0)}{1-\cos x}$。

2. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(1-x^2), & -1<x\leq 0\\ x^2\arctan x, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的可导性。

3. 已知当 $h\to 0$ 时，$f(x_0+2h)-f(x_0)-h$ 是 h 的等价无穷小量，求 $f'(x_0)$。

4. 设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x}+1$，求 $f'(-1)$。

5. 设 $f(x)=3^x$，$g(x)=x^3$，求 $\{f[g(x)]\}'$ 与 $f'[g'(x)]$。

6. 求曲线 $y=e^{-x}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程与法线方程。

7. 求函数 $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 的二阶导数 y''。

8. 设 $y=f^2(x)+f(x^2)$，$f(x)$ 具有二阶导数，求 y''。

9. 求由方程 $x=\sin(xy)$ 所确定的隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$。

10. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶导数连续，$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x f(x)}{x}, & x\neq 0\\ f(0), & x=0\end{cases}$，求 $\varphi'(x)$ 并指出其连续区间。

四、 答案与详细解析

4.1 单项选择题（30 题）

1. **答案：C** 解：利用导数定义与等价无穷小：$\ln(1-h) \sim -h$，$\sqrt{1+h^2}-1 \sim \frac{1}{2}h^2$，$\tan h - \sin h \sim \frac{1}{2}h^3$ $f(u) \sim f'(0)u$ $(u \to 0)$，逐项计算可知仅 C 选项极限为 0。

2. **答案：B** 解：函数可导必连续，逆否命题：不连续一定不可导。

3. **答案：A** 解：可导 $\Rightarrow$ 连续；不可导仍可能存在切线（如 $y=|x|$ 在 $x=0$）。

4. **答案：A** 解：一阶导数 $y'=2xf'(x^2+a)$，二阶导数 $y''=2f'(x^2+a)+4x^2f''(x^2+a)$。

5. **答案：A** 解：可导必连续，连续则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=2$。

6. **答案：A** 解：$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在能推出 $f'(x_0)$ 存在；$f'(x_0)$ 存在推不出导函数极限存在。

7. **答案：A** 解：利用左右导数判定，$x\to 1$ 时 $x^3-1\sim 3(x-1)$，可导等价于 $\varphi(1)=0$。

8. **答案：C** 解：$y=|x|$ 在 $x=0$ 左右导数不等；$y=\sqrt{x}, y=\ln x$ 在 $x=0$ 处无定义。

9. **答案：B** 解：$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$，函数连续；$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在，故不可导。

10. **答案：D** 解：左右导数均存在且相等，函数在 $x=0$ 处可导。

11. **答案：C** 解：$x\to 0^-$ 时 $f(x)\to 0$，由连续性得 $b=0$；再由左右导数相等得 $a=0$。

12. **答案：B** 解：$x=0$ 处左右导数分别为 $1,-1$，不相等，连续但不可导。

13. **答案：D** 解：利用导数定义计算 $F'(0)=2f'(0)$。

14. **答案：D** 解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-2x)}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-2x)-f(1)}{-2x}=2f'(1)=-2$，得 $f'(1)=-1$。

15. **答案：B** 解：e^2 为常数，导数为 0，$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$。

16. **答案：C** 解：复合函数求导：$(e^{-x^2})'=e^{-x^2}\cdot(-2x)=-2xe^{-x^2}$。

17. **答案：B** 解：$f'(x)=\sin x+x\cos x$，代入 $x=\frac{\pi}{2}$ 得 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$。

18. **答案：A** 解：令 $t=x-1$，$f(t)=(t+1)^2-1=t^2+2t$，$f'(t)=2t+2$。

19. **答案：A** 解：令 $t=\sin^2 x$，$f(t)=1-t$，故 $f'(t)=-1$。
20. **答案：A** 解：令 $t=e^x \Rightarrow x=\ln t$，$f(t)=\dfrac{1}{1+\ln^2 t}$，求导可得结果。
21. **答案：D** 解：多层复合函数链式法则，逐次求导。
22. **答案：C** 解：$h'(x)=e^{1+g(x)}\cdot g'(x)$，代入 $x=1$ 解得 $g(1)=-\ln 2-1$。
23. **答案：A** 解：$y'(x)=4+\dfrac{1}{x^2}, x>0, y=0$ 时 $x=\dfrac{1}{2}$，反函数导数 $\varphi'(y)=\dfrac{1}{y'(x)}=\dfrac{1}{8}$。
24. **答案：B** 解：$y'=\ln x$，$x=e$ 时 $y'=1, y=0$，切线方程 $y=x-e$。
25. **答案：A** 解：代入点 $(-1,0)$，结合切线斜率相等，解得 $a=-1, b=-1, c=1$。
26. **答案：B** 解：$y'=2x+1=3\Rightarrow x=1$，代入得 $y=0$，坐标 $(1,0)$。
27. **答案：C** 解：指数函数高阶导数：$(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n$。
28. **答案：D** 解：隐函数求导，两边对 x 求导整理得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{y-x}$。
29. **答案：B** 解：幂指函数取对数求导，化简得结果。
30. **答案：B** 解：$dy=f'(x_0)\Delta x=\dfrac{1}{2}\Delta x$，二者为同阶无穷小。

4.2 填空题（10 题）

1. **答案：**$-\dfrac{1}{x\ln 2}$ 解：导数定义，原式 $=-f'(x)=-\dfrac{1}{x\ln 2}$。
2. **答案：**$\dfrac{1}{3}$ 解：原式 $=kf'(x_0)=\dfrac{1}{3}f'(x_0)\Rightarrow k=\dfrac{1}{3}$。
3. **答案：**0 解：分段函数左右导数均为 0。
4. **答案：**0；1 解：由连续与可导条件联立求解。
5. **答案：**$\csc x$ 解：复合求导化简可得。
6. **答案：**$\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+e^{2\sqrt{x}})}$
7. **答案：**$\dfrac{f''(\ln x)}{x^2}-\dfrac{f'(\ln x)}{x^2}$
8. **答案：**1 解：$y'=1-\sin x$，$x=0$ 时斜率为 1。
9. **答案：**$27!\cdot 3^{27}$ 解：一次多项式 27 阶导数为常数。
10. **答案：**$\cot^2 y$ 解：隐函数求导整理。

4.3 计算与证明题（10 题）

1. 解：$x \to 0$ 时 $1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+x^2)-f(x_0)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x_0)\cdot x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2f'(x_0)$$

2. 解：分别求左右导数：$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln(1-x^2)}{x}=0$，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2\arctan x}{x}=0$，左右导数相等，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

3. 解：由等价无穷小：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)-h}{h}=1$，展开得 $2f'(x_0)-1=1 \Rightarrow f'(x_0)=1$。

4. 解：令 $t=\dfrac{1}{x}$，$f(t)=\dfrac{1}{t^2}+t+1$，$f'(t)=-\dfrac{2}{t^3}+1$，代入 $t=-1$ 得 $f'(-1)=3$。

5. 解：$\left[f(g(x))\right]'=3^{x^3}\cdot\ln 3\cdot 3x^2$，$g'(x)=3x^2$，故 $f'(g'(x))=3^{3x^2}\ln 3$。

6. 解：$y'=-e^{-x}$，$x=0$ 时切线斜率 $k=-1$，切线方程：$y=-x+1$；法线斜率为 1，法线方程：$y=x+1$。

7. 解：一阶导数 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，二阶导数 $y''=-\dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$。

8. 解：$y'=2f(x)f'(x)+2xf'(x^2)$，$y''=2\left[f'(x)\right]^2+2f(x)f''(x)+2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)$。

9. 解：两边对 x 求导：$1=\cos(xy)\cdot(y+xy')$，整理得 $y'=\dfrac{1-y\cos(xy)}{x\cos(xy)}$ $(x\cos(xy)\neq 0)$。

10. 解：$x\neq 0$ 时：

$$\varphi'(x)=\frac{x\left(e^xf(x)+e^xf'(x)\right)-e^xf(x)}{x^2}$$

$x=0$ 处用导数定义求导；连续区间：$(-\infty,+\infty)$。