

# 高等数学（导数的应用）精选 50 题

库课数学 2000 题精选

## 一、单项选择题（30 题）

- 下列函数在给定区间上满足罗尔定理条件的是（ ）
  - $f(x) = x^2 - 5x + 6, [2, 3]$
  - $f(x) = |x|, [-1, 1]$
  - $f(x) = \frac{1}{x-1}, [0, 2]$
  - $f(x) = x, [0, 1]$
- 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续，开区间  $(a, b)$  内可导，则下列结论错误的是（ ）
  - 若  $f(a) = f(b)$ ，则  $\exists \xi \in (a, b)$ ，使得  $f'(\xi) = 0$
  - $\exists \xi \in (a, b)$ ，使得  $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
  - 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  内单调，则  $f'(x)$  不变号
  - 若  $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ ，则  $f(x)$  在  $[a, b]$  单调递减
- 函数  $f(x) = x^3 - 3x + 1$  的单调递减区间为（ ）
  - $(-\infty, +\infty)$
  - $(-1, 1)$
  - $(-\infty, -1)$
  - $(1, +\infty)$
- 设  $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$ ，则  $x_0$  是函数  $f(x)$  的（ ）
  - 极大值点
  - 极小值点
  - 非极值点
  - 拐点横坐标

5. 函数  $y = x + \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ) 的极小值为 ( )
- A. 1  
B. 2  
C. -2  
D. 不存在
6. 函数  $f(x) = x^2 e^{-x}$  的极大值点为 ( )
- A.  $x = 0$   
B.  $x = 2$   
C.  $x = -2$   
D.  $x = 1$
7. 若函数  $f(x)$  在区间  $I$  内二阶可导, 且  $f''(x) > 0$ , 则曲线  $y = f(x)$  在  $I$  内为 ( )
- A. 凸曲线 (上凸)  
B. 凹曲线 (下凸)  
C. 直线  
D. 无法判定
8. 曲线  $y = x^3 - 3x^2 + 1$  的拐点坐标是 ( )
- A.  $(1, -1)$   
B.  $(0, 1)$   
C.  $(2, -3)$   
D.  $(3, 1)$
9. 曲线  $y = \frac{1}{x-1}$  的渐近线为 ( )
- A. 仅有水平渐近线  
B. 仅有垂直渐近线  
C. 水平与垂直渐近线都有  
D. 无渐近线
10. 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$  利用洛必达法则计算结果为 ( )
- A. 0  
B. 1  
C.  $+\infty$

- D.  $-\infty$
11.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = ( \quad )$
- A. 0
- B. 1
- C.  $+\infty$
- D. 不存在
12.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = ( \quad )$
- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 0
13.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = ( \quad )$
- A. 0
- B. 1
- C.  $+\infty$
- D.  $-\infty$
14. 函数  $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$  在区间  $[-2, 4]$  上的最大值为 ( )
- A. 17
- B. 7
- C. -47
- D. -33
15. 设函数  $f(x)$  可导, 且  $\forall x > 0$  有  $xf'(x) - f(x) > 0$ , 则 ( )
- A.  $\frac{f(x)}{x}$  单调递增
- B.  $\frac{f(x)}{x}$  单调递减
- C.  $f(x)$  单调递增
- D.  $f(x)$  单调递减
16. 设  $f(x)$  在  $x = x_0$  处取得极值, 则必有 ( )
- A.  $f'(x_0) = 0$

- B.  $f''(x_0) = 0$   
C.  $f'(x_0) = 0$  或  $f'(x_0)$  不存在  
D.  $f''(x_0) > 0$
17. 曲线  $y = e^{-x^2}$  ( )  
A. 仅有一个拐点  
B. 有两个拐点  
C. 无拐点  
D. 有三个拐点
18. 函数  $y = \arctan x$  的渐近线为 ( )  
A.  $y = \frac{\pi}{2}$   
B.  $y = \pm \frac{\pi}{2}$   
C.  $x = \pm \frac{\pi}{2}$   
D. 无渐近线
19. 若  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  为  $\frac{0}{0}$  型不定式, 则使用洛必达法则的前提不包括 ( )  
A.  $f(x), g(x)$  在  $a$  某邻域可导  
B.  $g'(x) \neq 0$   
C.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在或为无穷大  
D.  $f(a) = g(a) = 1$
20. 函数  $f(x) = x - \sin x$  在  $\mathbb{R}$  上 ( )  
A. 单调递增  
B. 单调递减  
C. 先增后减  
D. 先减后增
21. 设  $f''(x)$  连续,  $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$ , 则下列说法正确的是 ( )  
A.  $x_0$  是极小值点  
B.  $x_0$  是极大值点  
C.  $(x_0, f(x_0))$  是拐点  
D.  $x_0$  非极值点也非拐点

22. 函数  $y = x^2 \ln x$  在定义域内 ( )
- A. 仅有极小值
  - B. 仅有极大值
  - C. 既有极大值又有极小值
  - D. 无极值
23. 曲线  $y = \frac{x^2}{x+1}$  的垂直渐近线方程为 ( )
- A.  $x = 0$
  - B.  $x = -1$
  - C.  $y = 0$
  - D.  $y = 1$
24. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上二阶可导,  $f(0) = f(1) = 0$ , 且  $\exists c \in (0, 1), f(c) > 0$ , 则必存在  $\xi \in (0, 1)$  使得 ( )
- A.  $f'(\xi) = 0$
  - B.  $f''(\xi) = 0$
  - C.  $f(\xi) = 0$
  - D.  $f''(\xi) > 0$
25.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = ( )$
- A. 0
  - B. 1
  - C. 2
  - D.  $+\infty$
26. 函数  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$  的极值点个数为 ( )
- A. 1
  - B. 2
  - C. 3
  - D. 4
27. 当  $x > 0$  时, 不等式  $\ln(1+x) < x$  ( )
- A. 恒成立
  - B. 仅部分成立

- C. 不成立  
D. 无法判断
28. 曲线  $y = x \ln(1+x)$  的凹凸区间分界点为 ( )
- A.  $x = 0$   
B.  $x = 1$   
C.  $x = -1$   
D.  $x = 2$
29. 设函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内可导, 且  $f'(x)$  单调递增, 则曲线  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内 ( )
- A. 上凸  
B. 下凸  
C. 直线  
D. 凹凸不定
30. 函数  $y = \sqrt[3]{x^2} - x$  在  $(-\infty, +\infty)$  上的极值情况为 ( )
- A. 仅有极大值  
B. 仅有极小值  
C. 既有极大值又有极小值  
D. 无极值

## 二、 填空题 (10 题)

1. 函数  $f(x) = x^3 - 3x$  的单调递增区间为\_\_\_\_\_。
2. 曲线  $y = x^3 - 3x^2$  的拐点坐标为\_\_\_\_\_。
3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} =$ \_\_\_\_\_。
4. 函数  $y = x^2 + \frac{2}{x}$  ( $x > 0$ ) 的极小值为\_\_\_\_\_。
5. 若  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$  在  $x = 1$  处取得极小值  $-2$ , 则  $a =$ \_\_\_\_,  $b =$ \_\_\_\_\_。
6. 曲线  $y = \frac{\sin x}{x}$  的水平渐近线方程为\_\_\_\_\_。
7. 设  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续,  $(0, 2)$  内可导, 且  $f(0) = 0, f(2) = 2$ , 由拉格朗日中值定理,  $\exists \xi \in (0, 2)$  使得  $f'(\xi) =$ \_\_\_\_\_。

8. 函数  $f(x) = xe^{-x}$  在  $[0, 2]$  上的最大值为\_\_\_\_\_。
9. 不等式  $e^x > 1 + x$  ( $x \neq 0$ ) 是利用函数\_\_\_\_\_的单调性证明。
10. 曲线  $y = x^4 - 6x^2 + 3$  的凹凸区间为：上凸区间\_\_\_\_，下凸区间\_\_\_\_\_。

### 三、 计算与证明题 (10 题)

- 利用洛必达法则求极限： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$ 。
- 求函数  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$  的单调区间、极值。
- 求曲线  $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$  的凹凸区间与拐点。
- 求函数  $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$  的单调区间、极值、渐近线。
- 证明：当  $x > 1$  时， $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ 。
- 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续， $(a, b)$  内可导， $f(a) = f(b) = 0$ ，求证： $\exists \xi \in (a, b)$ ，使得  $f(\xi) + f'(\xi) = 0$ 。
- 求函数  $f(x) = e^x \cos x$  在区间  $[0, \pi]$  上的最大值与最小值。
- 已知函数  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  有拐点  $(1, 3)$ ，且在  $x = 2$  处取得极值 2，求常数  $a, b, c, d$ 。
- 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(1+x))$ 。
- 讨论函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处的可导性与极值情况。

## 四、答案与详细解析

### 4.1 单项选择题 (30 题)

1. **答案: A** 解: 罗尔定理三条件: 闭区间连续、开区间可导、端点函数值相等。A 满足  $f(2) = f(3) = 0$ ; B 在  $x = 0$  不可导; C  $x = 1$  间断; D 端点函数不等。
2. **答案: D** 解:  $f'(x) > 0$  时函数在区间单调递增, D 表述错误。
3. **答案: B** 解:  $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$ , 令  $f'(x) < 0$ , 得  $-1 < x < 1$ 。
4. **答案: B** 解: 第二充分条件: 一阶导为 0、二阶导大于 0, 该点为极小值点。
5. **答案: B** 解:  $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$ ,  $x > 0$  驻点  $x = 1$ , 极小值  $y(1) = 2$ 。
6. **答案: B** 解:  $f'(x) = x(2-x)e^{-x}$ , 驻点  $x = 0, x = 2$ ;  $x = 2$  处取极大值。
7. **答案: B** 解: 二阶导数大于 0, 曲线为凹 (下凸)。
8. **答案: A** 解:  $y' = 3x^2 - 6$ ,  $y'' = 6x - 6$ ; 令  $y'' = 0$  得  $x = 1$ , 代入得  $y = -1$ , 拐点  $(1, -1)$ 。
9. **答案: C** 解:  $x \rightarrow 1$  为垂直渐近线;  $x \rightarrow \infty, y \rightarrow 0$  为水平渐近线。
10. **答案: B** 解:  $\frac{0}{0}$  型洛必达:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/(1+x)}{1} = 1$ 。
11. **答案: C** 解:  $\frac{\infty}{\infty}$  型洛必达:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1/x} = +\infty$ 。
12. **答案: C** 解: 洛必达:  $\lim_{x \rightarrow 1} 3x^2 = 3$ 。
13. **答案: A** 解: 改写为  $\frac{\ln x}{1/x}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$  型洛必达, 极限为 0。
14. **答案: A** 解: 求导找驻点, 计算区间端点、驻点函数值, 比较得最大值 17。
15. **答案: A** 解: 令  $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ ,  $F'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} > 0$ , 单调递增。
16. **答案: C** 解: 极值点必要条件: 驻点或导数不存在的点。
17. **答案: B** 解:  $y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$ , 令  $y'' = 0$  得  $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 两个拐点。
18. **答案: B** 解:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ , 两条水平渐近线。
19. **答案: D** 解: 洛必达法则只要求分子分母趋于  $0/\infty$ , 无需  $f(a) = g(a) = 1$ 。
20. **答案: A** 解:  $y' = 1 - \cos x \geq 0$ , 仅孤立点导数为 0, 函数在  $\mathbb{R}$  严格递增。

21. **答案: B** 解: 二阶导小于 0, 驻点为极大值点。
22. **答案: A** 解: 定义域  $x > 0$ , 求导得仅有极小值。
23. **答案: B** 解:  $x \rightarrow -1$  时分母趋于 0, 垂直渐近线  $x = -1$ 。
24. **答案: D** 解: 多次使用罗尔定理, 可证存在二阶导数大于 0 的点, 本题较难, 需要仔细分析。
25. **答案: C** 解: 连续两次洛必达法则, 计算得极限为 2。
26. **答案: A** 解: 求导分析驻点与符号, 仅有一个极值点。
27. **答案: A** 解: 令  $F(x) = x - \ln(1+x)$ ,  $x > 0$  时  $F'(x) > 0, F(x) > F(0) = 0$ , 不等式恒成立。
28. **答案: A** 解: 求二阶导, 令  $y'' = 0$  得  $x = 0$  为凹凸分界点。
29. **答案: B** 解:  $f'(x)$  单调递增  $\iff f''(x) > 0$ , 曲线下凸。
30. **答案: C** 解: 导数在  $x = 0$  不存在, 结合左右单调性, 既有极大又有极小值。

## 4.2 填空题 (10 题)

1. **答案:  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$**  解:  $f'(x) = 3x^2 - 3, f'(x) > 0$  解得区间。
2. **答案:  $(1, -2)$**  解: 求二阶导找拐点。
3. **答案: 1** 解:  $\frac{0}{0}$  型洛必达直接得结果。
4. **答案: 3** 解:  $x > 0$  驻点  $x = 1$ , 极小值 3。
5. **答案: 0; -3** 解: 联立极值条件与函数值求解方程组。
6. **答案:  $y = 0$**  解:  $x \rightarrow \infty$  时  $y \rightarrow 0$ 。
7. **答案: 1** 解: 拉格朗日中值公式  $f'(\xi) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 1$ 。
8. **答案:  $\frac{1}{e}$**  解: 比较驻点与端点函数值。
9. **答案:  $f(x) = e^x - x - 1$**
10. **答案:  $(-1, 1); (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$**  解: 二阶导判凹凸。

### 4.3 计算与证明题 (10 题)

1. 解: 该极限为  $\frac{0}{0}$  型, 连续两次洛必达:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

2. 解:  $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$  令  $f'(x) = 0$ , 得驻点  $x = -1, x = 3$ .  
单调递增:  $(-\infty, -1), (3, +\infty)$ ; 单调递减:  $(-1, 3)$ . 极大值  $f(-1) = 10$ , 极小值  $f(3) = -22$ .

3. 解:  $y' = 3x^2 - 12x + 9, y'' = 6x - 12$  令  $y'' = 0$ , 得  $x = 2$ .  $x < 2$  时  $y'' < 0$ , 曲线上凸;  $x > 2$  时  $y'' > 0$ , 曲线下凸. 拐点:  $(2, 3)$ .

4. 解: 定义域  $x \neq -1, f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$  驻点  $x = 0, x = -2$ . 单调区间:  $(-\infty, -2)$  增,  $(-2, -1)$  减,  $(-1, 0)$  减,  $(0, +\infty)$  增. 极大值  $f(-2) = -4$ , 极小值  $f(0) = 0$ .  
渐近线: 垂直  $x = -1$ ; 斜渐近线  $y = x - 1$ ; 无水平渐近线.

5. 证明: 令  $F(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 3, x > 1$   $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} > 0 (x > 1)$ ,  $F(x)$  在  $(1, +\infty)$  递增.  $F(x) > F(1) = 0$ , 即  $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ , 得证.

6. 证明: 构造辅助函数  $F(x) = e^x f(x)$ ,  $F(x)$  在  $[a, b]$  连续,  $(a, b)$  可导,  $F(a) = F(b) = 0$ . 由罗尔定理,  $\exists \xi \in (a, b), F'(\xi) = 0, F'(\xi) = e^\xi (f(\xi) + f'(\xi)) = 0 \implies f(\xi) + f'(\xi) = 0$ .

7. 解:  $f'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$ , 在  $[0, \pi]$  驻点  $x = \frac{\pi}{4}$ . 计算:  $f(0) = 1, f(\pi) = -e^\pi, f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$ . 最大值:  $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$ ; 最小值:  $-e^\pi$ .

8. 解:  $y' = 3ax^2 + 2bx + c, y'' = 6ax + 2b$  由拐点  $(1, 3)$ 、 $x = 2$  极值、两点函数值联立方程组, 解得:  $a = 2, b = -6, c = 8, d = 1$ .

9. 解:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(1+x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x}{1+x} = +\infty$ .

10. 解:  $x \rightarrow 0^+$  时,  $f'(x) = 2x \ln x + x, \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$ ; 左侧没有定义, 所以只有右导数  $f'(x) = 0$ , 右侧在  $x = 0$  附近  $f(x) < 0$ , 因此  $x = 0$  为极大值点.